Группы и алгебры Ли. Основные положения общей теории

А.Н.Панов

1 Введение

Теории групп и алгебр Ли посвящена обширная библиография. Однако многочисленные теоремы разбросаны по разным источникам, разобраться в которым нелегко студенту. Цель этого пособия дать краткое изложение основ теории групп и алгебр Ли и предложить ряд задач, решение которым будет способствовать усвоению материала. Доказательства теорем иногда опускаются, их можно найти в книгах [1, 2, 4, 3, 5]. От читателя потребуется знания по алгебре, геометрии и топологии в объеме 1-2 курса мехмата.

2 Алгебры Ли

Пусть K – поле характеристики нуль.
Определение 2.1. Линейное пространство $\mathfrak{g}$ над полем K называют *алгеброй Ли*, если в $\mathfrak{g}$ определена операция $x, y \mapsto [x, y]$ (называется *коммутатором*), удовлетворяющая следующим аксиомам:
1) операция $[x, y]$ линейна по x и y;
2) $[x, y] = -[y, x]$ для любых $x, y \in \mathfrak{g}$ (*аксиома кососимметричности*);
3) $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$ для любых $x, y, z \in \mathfrak{g}$ (*тождество Якоби*).
Замечание. Аксиомы 2) и 3) можно заменить на равносильные аксиомы
2') $[x, x] = 0$,
3') $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$.
Примеры.
1) Алгебра Vect_3 геометрических векторов с операцией $[x, y]$ векторное произведение.
2) Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(V)$ линейных операторов в линейном пространстве V. Операция $[\phi, \psi] = \phi\psi - \psi\phi$.
3) *Полная линейная алгебра Ли* $\mathfrak{gl}(n, K)$, состоящая из всех матриц размера $n \times n$ с элементами из поля . Коммутатор матриц определяется по формуле $[A, B] = AB - BA$.

4) Алгебра Ли гладких (т.е бесконечно дифференцируемых) векторных полей $\mathrm{Vect}(\mathbb{R}^n)$ на $\mathbb{R}^n$. Чтобы определить коммутатор отождествим векторное поле $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с дифференциальным оператором первого порядка

$$D_a = a_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Коммутатор векторных полей определяется как коммутатор соответствующих дифференциальных операторов $D_{[a,b]} = [D_a, D_b] = D_a D_b - D_b D_a$.
5) Произвольное линейное пространство с нулевым коммутатором. Такие алгебры Ли называют *коммутативными.*

Пусть $\mathfrak{g}$ алгебра Ли и $\mathfrak{h}$ подмножество $\mathfrak{g}$.

Определение 2.2. Говорят, что $\mathfrak{h}$ *подалгебра Ли* в $\mathfrak{g}$, если и $\mathfrak{h}$ является алгеброй Ли относительно операций из $\mathfrak{g}$.

Для того, чтобы $\mathfrak{h}$ являлось подалгеброй Ли в $\mathfrak{g}$ необходимо и достаточно, чтобы для любых элементов x, y из $\mathfrak{h}$ элементы $x+y$, αx и $[x, y]$ также принадлежали $\mathfrak{h}$.

Определение 2.3. Говорят, что I *идеал* в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, если I линейное подпространство в $\mathfrak{g}$ и для любых $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{h}$ их коммутатор $[x, y]$ принадлежит $\mathfrak{h}$.

Примеры. Во всех приведенных ниже примерах $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, K)$.
1) $\mathfrak{sl}(n, K) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, K) : \ \mathrm{Tr} A = 0\}$ (где $\mathrm{Tr} A$ след матрицы A). Подалгебру $\mathfrak{sl}(n, K)$ называют *специальной линейной алгеброй Ли.*
2) $\mathfrak{o}(n, K) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, K) : A^t = -A\}$ – алгебра Ли кососимметрических матриц. Здесь A^t – транспонированная матрица к матрице A.
3) $\mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : A^* = -A\}$ – алгебра Ли косо-эрмитовых матриц. Здесь $A^* = \overline{A}^t$ – сопряженная матрица к матрице A.
4) Алгебра Ли $\mathfrak{t}(n, K)$ треугольных матриц, состоит из матриц, у которых элементы ниже диагонали равны нулю. Алгебра Ли $\mathfrak{ut}(n, K)$ состоит из треугольных матриц с нулевыми элементами по диагонали. Алгебра Ли $\mathfrak{ut}(3, K)$ называется *алгеброй Гейзенберга.*
5) Подалгебра диагональных матриц. Эта подалгебра коммутативна.

Каждый идеал I является подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Фактор-пространство $\mathfrak{g}/I$, состоящее из классов смежности $[x] = x + I$, $x \in \mathfrak{g}$, является алгеброй Ли, относительно естественных операций. Подалгебра $\mathfrak{sl}(n, K)$ является идеалом в $\mathfrak{gl}(n, K)$. Подалгебра $\mathfrak{ut}(n, K)$ – идеал в $\mathfrak{t}(n, K)$. Подалгебра $\mathfrak{o}(n, K)$ и подалгебра диагональных матриц не являются идеалами в $\mathfrak{gl}(n, K)$.

Определение 2.4. Алгебра Ли называется простой алгеброй Ли, если $\dim \mathfrak{g} \neq 0$ или 1 и не содержит других идеалов, кроме тривиальных (то есть $\{0\}$ и $\mathfrak{g}$).

Задача 1. Доказать, что следующие алгебры Ли являются простыми:

a) Vect_3, b) $\mathfrak{sl}(2,K)$, c) $\mathfrak{sl}(n,K)$.

Задача 2. Доказать, что матрицы вида $\mathfrak{aff}(K) = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ образуют алгебру Ли (подалгебру в $\mathfrak{gl}(2,K)$). Доказать, что $\mathfrak{h}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ и $\mathfrak{h}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ – подалгебры $\mathfrak{aff}(K)$. Причем, $\mathfrak{h}_2$ является идеалом, а $\mathfrak{h}_1$ нет.

Задача 3. Пусть A произвольная $n \times n$-матрица. Доказать, что

$$\{X \in \mathfrak{gl}(n,K) :\ X^t A + AX = 0\}$$

подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(n,K)$.

Задача 4. Пусть I, J два идеала в $\mathfrak{g}$. Доказать, что линейное подпространство $[I,J]$, натянутое на $\{[x,y] :\ x \in I, y \in J\}$, также является идеалом в $\mathfrak{g}$. В частности, коммутатор $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ идеал в $\mathfrak{g}$.

Определение 2.5. Пусть $\mathfrak{g}$ произвольная алгебра Ли. Образуем две цепочки идеалов $\mathfrak{g}^{(i)} = [\mathfrak{g}^{(i-1)}, \mathfrak{g}^{(i-1)}]$ и $\mathfrak{g}_i = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{i-1}]$.

1) Говорят, что $\mathfrak{g}$ *разрешимая алгебра Ли*, если цепочка $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}' \supset \mathfrak{g}'' \supset \cdots$ обрывается (т.е. существует номер k такой, что $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$).

2) Говорят, что $\mathfrak{g}$ *нильпотентная алгебра Ли*, если цепочка $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \cdots$ обрывается (т.е. существует номер k такой, что $\mathfrak{g}_k = 0$).

Задача 5. Доказать, что $\mathfrak{t}(n,K)$ разрешимая алгебра Ли и $\mathfrak{ut}(n,K)$ нильпотентная алгебра Ли.

Определение 2.6. Пусть $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ алгебры Ли и $\Phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ линейное отображение. Говорят, что Φ – *гомоморфизм алгебр Ли*, если $\Phi([x,y]) = [\Phi(x), \Phi(y)]$ для любых $x, y \in \mathfrak{g}_1$. Говорят, что Φ – *изоморфизм алгебр Ли*, если Φ – биекция и гомоморфизм алгебр Ли. Две алгебры Ли изоморфны (обозначение $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2$), если существует изоморфизм одной алгебры Ли на другую. Изоморфизм алгебры Ли на себя называется *автоморфизмом.*

Примеры.

1) $\mathrm{Tr} : \mathfrak{gl}(n,K) \to K$ гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,K)$ одномерную алгебру Ли K с нулевым коммутатором.

2) Алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ и $\mathfrak{gl}(n,K)$ изоморфны, если V линейное пространство размерности n над полем K. Изоморфизм устанавливается сопоставлением линейному оператору его матрицы в фиксированном базисе.

3) Естественная проекция $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на фактор-алгебру Ли $\mathfrak{g}/I$ является гомоморфизмом алгебр Ли.

4) Отображения $X \mapsto gXg^{-1}$ и $X \mapsto -X^t$ являются автоморфизмами алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,K)$.

Следующая теорема называется *теоремой о гомоморфизме.*

Теорема 2.7. Пусть $\Phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ гомоморфизм алгебры Ли. Тогда
1) $\mathrm{Ker}(\Phi)$ – идеал $\mathfrak{g}_1$ и $\mathrm{Im}(\Phi)$ подалгебра в $\mathfrak{g}_2$;
2) Существует изоморфизм $\overline{\Phi} : \mathfrak{g}_1/\mathrm{Ker}(\Phi) \to \mathrm{Im}(\Phi)$ такой, что $\Phi = \overline{\Phi}\pi$, где π естественная проекция $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_1/\mathrm{Ker}(\Phi)$.

Равенство $\Phi = \overline{\Phi}\pi$ означает коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathfrak{g}_2 \\
& \mathfrak{g}_1/\mathrm{Ker}(\Phi) \arrow[u, "\overline{\Phi}"']
\end{tikzcd}$$

Пример

Соответствие $\Phi : \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \to A$ гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$ ступенчатых $(p+q)\times(p+q)$-матриц в $\mathfrak{gl}(p, K)$. Тогда $I = \mathrm{Ker}(\Phi) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \right\}$, $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathfrak{gl}(p, K)$ и $\mathfrak{g}_1/I \cong \mathfrak{gl}(p, K)$.

Определение 2.8. Пусть $\mathfrak{g}$ алгебра Ли над полем K, $e_1, \ldots, e_n$ базис $\mathfrak{g}$ и

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k. \tag{1}$$

Соотношения (1) называют *структурными соотношениями* и набор констант $\{c_{ij}^k : \ i, j, k = 1, \ldots n\}$ называют *набором структурных констант* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Примеры. При выписывании структурных соотношений опускаются соотношения $[e_i, e_i] = 0$.
1) $\mathfrak{g} = \mathrm{Vect}_3$, e_1, e_2, e_3 правый декартов базис. Структурные соотношения $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = e_2$.
2) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, K)$, $E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Базис $\{E_+, E_-, H\}$ называют базисом Картана. Структурные соотношения $[H, E_\pm] = \pm 2E_\pm$, $[E_+, E_-] = H$.
3) $\mathfrak{g} = \mathfrak{aff}(K)$ (см. Задача 2 этого параграфа), $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Структурные соотношения в базисе $\{e_1, e_2\}$ сводятся к одному соотношению $[e_1, e_2] = e_2$.
4) $\mathfrak{g}$ алгебра Гейзенберга $\mathfrak{ut}(3, K)$, $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Соотношения $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$.

Легко видеть, что две алгебры Ли изоморфны, если в каждой из них есть базис с одинаковыми структурными соотношениями.

Задача 6. Доказать, что $\mathrm{Vect}_3 \cong \mathfrak{o}(3, \mathbb{R})$.

Задача 7. Доказать, что следующие трёхмерные алгебры Ли попарно не изоморфны Vect_3, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, $\mathfrak{ut}(3, K)$.

Задача 8. Доказать, что алгебра Ли $\mathrm{Vect}_3 \otimes \mathbb{C}$ изоморфна $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли над полем K, и V – линейное пространство над полем K.

Определение 2.9. *Представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в линейном пространстве V называют гомоморфизм $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Говорят, что два представления τ, τ' в линейных пространствах V, V' *эквивалентны*, если существует изоморфизм линейных пространств $\mathcal{S} : V \to V'$ такой, что $\tau_x = \mathcal{S}^{-1}\tau'_x\mathcal{S}$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Последнее равенство равносильно коммутативности, следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\tau_x"] \arrow[d, "\mathcal{S}"'] & V \arrow[d, "\mathcal{S}"'] \\ V' \arrow[r, "\tau'_x"] & V' \end{tikzcd}$$

Определение 2.10. Представление τ в линейном пространстве V *неприводимо*, если $V \neq 0$, и V не имеет других инвариантных (относительно операторов τ_x, $x \in \mathfrak{g}$) подпространств, кроме $\{0\}$ и V.

Определение 2.11. *Матричным представлением* $\mathcal{T}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называют гомоморфизм $\mathcal{T} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, K)$. При этом n называют размерностью представления. Говорят, что два матричных представления $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ одной размерности n эквивалентны, если существует невырожденная $n \times n$-матрица S такая, что $\mathcal{T}_x = S^{-1}\mathcal{T}'_x S$ для любого $x \in \mathfrak{g}$.

Если линейное пространство V конечномерно, то сопоставление каждому линейному оператору τ_x его матрицы $\mathcal{T}_x$ в фиксированном базисе позволяет отождествить представление τ в V с матричным представлением $\mathcal{T}$.

Примеры.

1) Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n, K)$ и её подалгебры имеют естественное представление в пространстве $V = K^n$;

2) Пусть $\mathfrak{g}$ – произвольная алгебра Ли. Сопоставим $x \in \mathfrak{g}$ линейных оператор $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (назовём присоединенным оператором) по формуле $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$. Соответствие $x \mapsto \mathrm{ad}_x$ является представлением $\mathfrak{g}$. Это представление называется присоединенным представлением.

3) $\mathfrak{g}$ – алгебра Гейзенберга $\mathfrak{ut}(3, \mathbb{R})$, и τ – представление $\mathfrak{g}$ в пространстве $C^\infty(\mathbb{R})$, определенное формулами $\tau_{e_1} f = \frac{df}{dx}$, $\tau_{e_2} f = xf$, $\tau_{e_3} f = f$.

4) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, τ представление $\mathfrak{g}$ в пространстве $\mathbb{C}[x, y]$, определенное

формулами $\tau_{E_+} = x\frac{\partial}{\partial y}$, $\tau_{E_-} = y\frac{\partial}{\partial x}$, $\tau_H = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$.
Определение 2.12. На произвольной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ определена билинейная форма $(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y)$. Эта форма называется формой Киллинга.
Задача 9. Доказать, что (x, y) симметрическая билинейная форма.
Задача 10. Доказать $([x, y], z) = (x, [y, z])$.
Задача 11. Вычислить форму Киллинга для алгебр Ли Vect_3 и $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Найти положительный и отрицательный индексы инерции этих форм.
Задача 12. Доказать, что
1) всякая двумерная алгебра Ли над K либо коммутативна, либо изоморфна $\mathfrak{aff}(K)$;
2) всякая трёхмерная алгебра Ли на полем $\mathbb{C}$ либо простая и изоморфна $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, либо разрешима и изоморфна алгебре Ли матриц вида

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11}t & a_{12}t & s_1 \\ a_{21}t & a_{22}t & s_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \quad t, s_1, s_2 \in \mathbb{C} \right\}, \tag{2}$$

где $a_{ij} \in \mathbb{C}$ фиксированные числа;
3) всякая трёхмерная алгебра Ли на полем $\mathbb{R}$ либо простая и изоморфна Vect_3 или $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, либо разрешима и изоморфна алгебре Ли матриц вида (2) с вещественными a_{ij} и t, s_1, s_2.
Задача 13. Доказать, что
1) отображение $x \mapsto \mathrm{ad}_x$ является изоморфизмом алгебры Ли Vect_3 на алгебру Ли кососимметрических матриц $\mathfrak{o}(3, \mathbb{R})$;
2) доказать, что для любого вращения R и любого $x \in \mathrm{Vect}_3$ имеет место $\mathrm{ad}_{Rx} = R\mathrm{ad}_x R^{-1}$.
Задача 14. Доказать, что линейный оператор $R : \mathrm{Vect}_3 \to \mathrm{Vect}_3$ является гомоморфизмом алгебр Ли тогда и только тогда, когда является R - вращение (т.е собственный ортогональный оператор).

3 Основные определения теории гладких многообразий

Пусть M – множество. *Картой* на M называют пару (U, ϕ), где U подмножество M и ϕ биективное отображение U на открытое подмножество Ω_α в $\mathbb{R}^n$. Число n называет размерностью карты. Если $p \in M$ и $\phi(p) = (x_1, \ldots, x_n)$, то $x_1, \ldots, x_n$ называют *локальными координатами* точки p.

Гладкое многообразие – это множество покрытое системой согласованных карт. Это короткое определение нужно уточнить. По определению, M - гладкое многообразие, если существует система карт $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, такая, что $M = \bigcup U_\alpha$ и любые две карты $\phi_\alpha : U_\alpha \to \Omega_\alpha$ и $\phi_\beta : U_\beta \to \Omega_\beta$ согласованы в следующем смысле: их размерности совпадают, подмножества $\Omega_{\alpha,\beta} = \phi_\alpha(U_\alpha \cup U_\beta)$ и $\Omega_{\beta,\alpha} = \phi_\beta(U_\alpha \cup U_\beta)$ открыты в $\mathbb{R}^n$, и функция склейки карт $\xi_{\alpha,\beta} = \phi_\beta \phi_\alpha^{-1}$ является гладким (т.е. бесконечно дифференцируемым) биективным отображением из $\Omega_{\alpha,\beta}$ в $\Omega_{\beta,\alpha}$. Если от функций склейки карт $\{\xi_{\alpha,\beta}\}$ потребовать только непрерывности, то M называют *топологическим* (или непрерывным) *многообразием.* Число n называют *размерностью* гладкого (топологического) многообразия. Примерам гладких многообразий являются: n-мерное координатное пространство $\mathbb{R}^n$, любое открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$, $\quad n$-мерная сфера $S^n = \{(x_0, \ldots, x_n) : \quad x_0^2 + \ldots x_n^2 = 1\}$, кривые эллипс, гипербола, парабола, поверхности второго порядка (исключая конус и пару пересекающихся плоскостей).

Пусть M – гладкое многообразие, и $f : M \to \mathbb{R}$ – числовая функция на M. Функцию f называют *гладкой*, если она гладкая во всех картах (т.е. является гладкой функцией в локальных координатах любой своей точки). Пусть $F : M_1 \to M_2$ отображение гладких многообразий (возможно разных размерностей). Отображение F называют *гладким*, если оно гладкое во всех картах (т.е. является гладким отображением в локальных координатах любой своей точки из M_1 and ее образа в M_2).

Пусть M – гладкое многообразие размерности n, и N – подмножество в M. Тогда N называют подмногообразием в M в размерности m, если для любой точки $p \in N$ существует карта, в которой N в представляется локальных координатах как множество всех решений некоторой системы из $n - m$ гладких уравнений $f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, n - m$, причем ранг якобиана

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_{n-m})}{D(x_1, \ldots, x_n)}$$

в точке p равен $n - m$. Например, сфера $S^2 = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ является подмногообразием $\mathbb{R}^3$, а конус $\{x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$ – нет.

Дадим определение касательно пространства в точке многообразия. Для простоты ограничимся случаем, когда M – подмногообразие $\mathbb{R}^n$. По определению, вектор $a = (a_1, \ldots, a_n)$ – касательный вектор для многообразия M в точке $p \in M$, если существует гладкая кривая $x(t) \in M$, которая определена в некоторой окрестности $t = 0, \quad x(0) = p$, и $\frac{x(t)}{dt}|_{t=0} = a$. Множество касательных векторов в точке $p \in M$ является линейным пространством размерности, равной размерности M, обозначается $T_p(M)$ и называется касательным пространством к M в точке p. Если $F : M_1 \to M_2$ – гладкое отображение гладких многообразий, то в любой точке $p \in M_1$ определенно линейное отображение касательных пространств $d_p : T_p(M_1) \to: T_{F(p)}(M_2)$.

По определению,

$$d_p(a) = \left.\frac{dF(x(t))}{dt}\right|_{t=0}.$$

Отображение d_p называется *дифференциалом* отображения F в точке p. В локальных координатах дифференциал d_p задается матрицей Якоби отображения F.

4 Группы Ли

Группа – это множество с бинарной операцией $g_1, g_2 \mapsto g_1 g_2$, удовлетворяющей аксиомам:
1) $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3$ (аксиома ассоциативности);
2) существует элемент e такой, что $ge = eg = g$ (существование единичного элемента);
3) для любого $g \in G$ существует $g^{-1} \in G$ такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ (существование обратного элемента).
Определение 4.1. Пусть G группа. Говорят, что G – *группа Ли*, если G является гладким (т.е. бесконечно дифференцируемым) многообразием, для которого операции умножения $g_1, g_2 \mapsto g_1 g_2$ и обращения $g \mapsto g^{-1}$ являются гладкими.

Аналогично определяется топологическая (непрерывная). По определению, группа G является топологической (непрерывной) группой, если G топологическое пространство, и операции умножения $g_1, g_2 \mapsto g_1 g_2$ и обращения $g \mapsto g^{-1}$ являются непрерывными.

Пусть G - группа. Подмножество $H \subset G$ называют *подгруппой*, если H само является группой относительно операций из G. Для того, чтобы установить , что данное подмножество H является подгруппой в G необходимо и достаточно проверить два свойства:
1) $\forall h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 h_2 \in H$, 2) $\forall h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$. Подгруппа H *нормальная подгруппа* в G (другой термин: H *нормальный делитель* в G), если $\forall h \in H, g \in G \Rightarrow gxg^{-1} \in H$.
Определение 4.2. Пусть G группа, и H – подмножество в G. Говоря,что и $H \subset G$ *подгруппа Ли* в G, если H – подгруппа в G и H – подмногообразие в G. Отметим, что всякая подгруппа Ли сама является группой Ли.
Замечание. Для того, чтобы подгруппа H являлась подгруппой Ли достаточно проверить, что H подмногообразие в G. Последнее сводится к существованию в каждое точке $p \in H$ системы гладких уравнений, определяющей H (см. раздел 3). Заметим, что поскольку H подгруппа, то существование требуемой системы уравнений достаточно установить для $p = e$. Это упрощает вычисления.

Примеры.
1) Группа $\mathrm{GL}(n,K)$ – это группа невырожденных $n\times n$-матриц, определенных над полем K, где поле K – поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Эта группа Ли называется *полной линейной группой*. Эту группу Ли можно реализовать в операторной форме как группу невырожденных операторов $\mathrm{GL}(V)$ в n-мерном линейном пространстве V над полем K. Подгруппы Ли в $\mathrm{GL}(n,K)$ называют *линейными группами Ли*.
2) *Специальная матричная группа*
$\mathrm{SL}(n,K)=\{g\in \mathrm{GL}(n,K):\ \det(g)=1\}$, $K=\mathbb{R},\mathbb{C}$.
3) *Ортогональная группа* $\mathrm{O}(n,K)=\{g\in \mathrm{GL}(n,K):\ g^tg=1\}$, $K=\mathbb{R},\mathbb{C}$. Группа может быть реализована в операторной форме как группа линейных операторов в K^n, сохраняющих квадратичную форму $x_1^2+\ldots+x_n^2$ (или билинейную форму $x_1y_1+\ldots+x_ny_n$). *Специальная ортогональная группа* $\mathrm{SO}(n,K)=\{g\in \mathrm{O}(n,K):\ \det(g)=1\}$.
4) Унитарная группа $\mathrm{U}(n)=\{g\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}\}:\ g^*g=1\}$. Группа может быть реализована в операторной форме как группа линейных операторов $\mathbb{C}^n$, сохраняющих $|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2$ (или скалярное произведение $x_1\overline{y_1}+\ldots+x_n\overline{y_n}$). *Специальная унитарная группа* $\mathrm{SU}(n)=\{g\in \mathrm{U}(n):\ \det(g)=1\}$.
5) *Треугольная группа* $\mathrm{T}(n,K)$, состоящая из невырожденных $n\times n$-матриц с нулями ниже диагонали. *Унитреугольная группа* $\mathrm{UT}(n,K)$, состоящая из элементов $\mathrm{T}(n,K)$ с единицами по диагонали. Группа $\mathrm{UT}(3,\mathbb{R})$ называется *группой Гейзенберга*.
6) Группа диагональных невырожденных матриц. Эта группа коммутативна.
7) Группа аффинных преобразований прямой линии

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}:\ a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0\right\}$$

8) Группа окружности (одномерный тор) $T=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|=1\}$.
9) Группы $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ с операцией сложения. Группы ненулевых элементов $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$ с операцией умножения. Группа положительных чисел $\mathbb{R}_+$ с операцией умножения.
Задача 1. Доказать, что подгруппа $\mathrm{SU}(2)$ состоит из комплексных матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta\\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix}$, $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$.

Топологическое пространство (в частности, гладкое многообразие) называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывным путём. Гладкое многообразие называется односвязным, если оно связное и любая петля на нём может быть стянута в точку.

Группа $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ распадается на две связные компоненты, которые соответствуют $a > 0$ и $a < 0$. Компонента $\mathrm{Aff}_+(\mathbb{R})$, соответствующая $a > 0$, односвязная группа Ли.

Задача 2. Доказать, что следующие группы являются связными группами Ли: $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, треугольная над $\mathbb{C}$ и унитреугольная группа над $\mathbb{R}$. Указание: соединить произвольный элемент группы непрерывным путём с единицей.

Задача 3. Доказать, что группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ не является связной.

Задача 4. Доказать, что
1) группа $\mathrm{U}(n)$ связная,
2) группа $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ распадается на две связные компоненты

$$\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) \cup \mathrm{O}_-(n, \mathbb{R}),$$

где $\mathrm{O}_-(n, K) = \{g \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) : \det(g) = -1\}$. Указание: воспользоваться теорией канонических форм унитарных и ортогональных матриц.

Задача 5. Доказать, что группа $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ связная. Указание: доказать, что всякий элемент $g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ допускает единственное разложение в виде произведения $g = kam$, где $k \in \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, $m \in \mathfrak{ut}(n, \mathbb{R})$ и a диагональная матрица с положительными элементами и $\det a = 1$.

Задача 6. Доказать, что группы 1) $\mathrm{SU}(n)$, 2) $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ являются односвязными. *Указание 1*: рассмотреть действие группы $\mathrm{SU}(n)$ на сфере $S^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n : \| z \| = 1\}$; доказать, что группа $\mathrm{SU}(n)$ гомеоморфна (как топологическое пространство) произведению $S^{2n-1} \times \mathrm{SU}(n-1)$; применить индукцию по n. *Указание 2*: доказать, что всякий элемент $g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ допускает единственное разложение в виде произведения $g = kam$, где $k \in \mathrm{SU}(n)$, $m \in \mathfrak{ut}(n, \mathbb{C})$ и a диагональная матрица с положительными элементами и $\det a = 1$; доказать, что группа $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ гомеоморфна (как топологическое пространство) произведению $\mathrm{SU}(n) \otimes \mathbb{R}^{n^2-1}$.

Задача 7. Доказать, что группы $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ не являются односвязными. Указание: применить разложения аналогичные разложениям из предыдущей задачи.

Напомним, что *гомоморфизмом групп* называют отображение $\varphi : G_1 \to G_2$ группы G_1 в группу G_2, для которого $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$.

Определение 4.3. Пусть G_1, G_2 – две группы Ли, и $\varphi : G_1 \to G_2$ – отображение G_1 в G_2. Говорят, что φ *гомоморфизм групп Ли*, если φ гомоморфизм групп и гладкое отображение. *Изоморфизм групп Ли* – взаимно-однозначный гомоморфизм одной группы Ли на другую.

Определение 4.4. Пусть V линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$. *Представление* группы Ли G в линейном пространстве V – это гомоморфизм групп Ли $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$.

Определение эквивалентности представлений и определение неприводимого представления вводится аналогично тому как это делалось в разделе 2 для алгебр Ли.

Примеры.

1) $\det : \mathrm{GL}(n, K) \to K^*$, где $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, – гомоморфизм групп Ли.

2) $\varphi : \mathrm{T}(n, K) \to \mathrm{T}(m, K)$ гомоморфизм групп Ли, ставящий в соответствие треугольной $n \times n$-матрице её левый верхний $m \times m$-блок.

Задача 8. Доказать, что всякий гомоморфизм следующих одномерных групп Ли имеет указанный ниже вид для некоторого $a \in \mathbb{R}$:

1) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ax$; 2) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = e^{ax}$; 3) $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \log_a(x)$;
4) $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = x^a = e^{a \ln x}$; 5) $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = |x|^a$;
6) $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $|x|^a = \mathrm{sgn}^\varepsilon(x)|x|^a$, $\varepsilon = 0, 1$; 7) $\mathbb{R} \to T$, $\varphi(x) = e^{iax}$;
8) $T \to T$, $\varphi(z) = z^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Напомним определение дискретного подмножества. Говорят, что подмножество P топологического пространства (в частности, гладкого многообразия) M *дискретно*, если для любой точки $p \in P$ существует её окрестность (т.е. открытое подмножество, содержащее p), в которой нет других точек P кроме p.

Определение 4.5. *Дискретная подгруппа группы Ли* G – это подгруппа, которая является дискретным подмножеством G как топологического пространства.

Задача 9. Доказать, что

1) всякая дискретная подгруппа в $\mathbb{R}$ либо тривиальная подгруппа $\{0\}$, либо $\mathbb{Z}a$, где $a \neq 0$;

2) всякая дискретная подгруппа в $\mathbb{R}^2$ либо тривиальная подгруппа $\{\overline{0}\}$, либо $\mathbb{Z}\overline{a}$, где $a \neq 0$, либо $\mathbb{Z}\overline{a} \oplus \mathbb{Z}\overline{b}$, где векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ линейно независимы.

3) всякая дискретная подгруппа в T конечна и совпадает с одной из подгрупп $C_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ корней n-ой степени из 1.

Задача 10. Доказать, что всякий дискретный нормальный делитель связной группы Ли G содержится в её центре. Напомним, что центр $Z(G)$ группы G состоит из $z \in G$ таких, что $zg = gz$ для любого $g \in G$.

5 Касательная алгебра

Цель этого параграфа – показать, что касательное пространство в единице к группе Ли является алгеброй Ли. Для наглядности ограничимся случаем линейных групп Ли.

Пусть G – линейная группа Ли. То есть G – подгруппа Ли в группе $\mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$ достаточно большого порядка N. Касательное пространство к G в произвольной точке реализуется как линейное подпространство в полной матричной алгебре $\mathfrak{gl}(N,\mathbb{R})$. Мы собираемся доказать, что касательное пространство к G в единице E является алгеброй Ли (точнее, подалгеброй в $\mathfrak{gl}(N,\mathbb{R})$). По определению, матрица X принадлежит касательному пространству $T_E(G)$, если существует кривая $g(t)$ (все кривые здесь и далее предполагаются гладкими) такая, что

$$\forall t\ g(t)\in G,\quad g(0)=E \quad \text{и} \quad \left.\frac{dg(t)}{dt}\right|_{t=0}=X. \tag{3}$$

Задача 1. Доказать, что

$$\frac{dg^{-1}(t)}{dt}=-g^{-1}\frac{dg(t)}{dt}g^{-1}.$$

Покажем, что для любых $X,Y\in T_E(G)$ их коммутатор $[X,Y]$ (равный $XY-YX$) также принадлежит $T_E(G)$. Доказательство будет проведено в два этапа.

Пункт 1. Цель этого пункта – показать, что для любых $Y\in T_E(G)$ и $g\in G$ матрица gYg^{-1} лежит в $T_E(G)$. Действительно, так как $Y\in T_E(G)$, то существует кривая $h(t)$ такая, что $\forall t\ h(t)\in G, h(0)=E$ и $\left.\frac{dh(t)}{dt}\right|_{t=0}=Y$. Рассмотрим кривую $\tilde{h}(t):=gh(t)g^{-1}$. Кривая $\tilde{h}(t)$ удовлетворяет условиям $\forall t\ \tilde{h}(t)\in G,\ \tilde{h}(0)=E$. Поэтому матрица

$$\left.\frac{dh(t)}{dt}\right|_{t=0}=g\left.\frac{dh(t)}{dt}\right|_{t=0}g^{-1}=gYg^{-1}$$

принадлежит $T_E(G)$. Цель первого пункта достигнута. Остановимся на его итогах. Обозначим $\mathrm{Ad}_g(X):=gXg^{-1}$ для $X\in T_E(G)$.

Определение 5.1. Линейный оператор $\mathrm{Ad}_g: T_E(G)\to T_E(G)$ называют *присоединенным оператором* для $g\in G$. Представление $g\mapsto \mathrm{Ad}_g$ – *присоединенное представление* группы Ли G в линейном пространстве $T_E(G)$.

Пункт 2. Пусть $X,Y\in T_E(G)$. Покажем, что $XY-YX\in T_E(G)$. Существует кривая $g(t)$ такая, что выполнено (3). Согласно пункту 1 кривая $g(t)Yg^{-1}(t)$ содержится в $T_E(G)$. Поэтому производная

$$\left.\frac{dg(t)Yg^{-1}(t)}{dt}\right|_{t=0}==\left.\frac{dg(t)}{dt}\right|_{t=0}Yg^{-1}(o)+g(0)Y\left.\frac{dg^{-1}(t)}{dt}\right|_{t=0}=XY-YX$$

также принадлежит $T_E(G)$. Окончательно $[X,Y]\in T_E(G)$.

Определение 5.2. Алгебра Ли $T_E(G)$ называется *касательной алгеброй* к G или просто *алгеброй Ли группы Ли* G и обозначается $\mathrm{Lie}(G)$.

Приведём примеры нахождения алгебры Ли по заданной группе Ли.

Пример 1. $G=\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)=\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

Пример 2. $G=\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. Покажем, что $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)=\mathfrak{o}(n,\mathbb{R})$. Пусть

$X \in \mathrm{Lie}(G)$. Существует кривая $g(t)$, удовлетворяющая (3). Так как $g(t) \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, то

$$g^T(t)g(t) = E \tag{4}$$

для любого t. Здесь g^T транспонированная матрица к g. Вычислим производную (4) при $t = 0$. Получаем

$$\left.\frac{dg^T(t)g(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{dg^T(t)}{dt}\right|_{t=0} g(0) + g^T(0) \left.\frac{dg(t)}{dt}\right|_{t=0} = X^T + X = 0.$$

Мы доказали, что $\mathrm{Lie}(G)$ линейное подпространство в алгебре Ли кососимметрических матриц $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$. Покажем обратное включение. Пусть $Y \in \mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$. Рассмотрим кривую $g(t) := e^{Yt}$. Кривая удовлетворяет (3) (доказать). Поэтому $Y \in \mathrm{Lie}(G)$. Окончательно, $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$.
Замечание. Алгебра Ли для $G = \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ совпадает с алгеброй Ли для $G = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$.
Задача 2. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Доказать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли для группы Ли G, где
1) $G = \mathrm{GL}(n, K)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, K)$; 2) $G = \mathrm{SL}(n, K)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, K)$;
3) $G = \mathrm{U}(n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$, 4) $G = \mathrm{T}(n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{t}(n, K)$, 5) $G = \mathrm{UT}(n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{ut}(n, K)$, 6) $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ (или $G = \mathrm{Aff}_+(\mathbb{R})$), $\mathfrak{g} = \mathfrak{aff}(n, K)$.
Задача 3. Доказать, что, если G коммутативная группа Ли, то $\mathrm{Lie}(G)$ коммутативная алгебра Ли.

6 Подгруппы Ли и подалгебры Ли

Пусть G группа Ли и $\mathfrak{g}$ её алгебра Ли.
Теорема 6.1.
1) Если H подгруппа Ли в G, то $\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H)$ подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$.
2) Если H нормальная подгруппа Ли в G, то $\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H)$ идеал в $\mathfrak{g}$.

Поставим вопрос об обратимости этой теоремы. Верно ли, что для любой подалгебры Ли $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ существует подгруппа Ли H в G такая, что $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$. Оказывается, что ответ положителен, если группа G односвязная. Если нет, то ответ в общем случае отрицательный. Приводимый ниже контрпример носит название "иррациональной" обмотки тора.
Рассмотрим двумерный тор

$$T^2 = T \times T = \{(e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s}): \quad t, s \in \mathbb{R}\};$$

его алгебра Ли коммутативна и изоморфна $\mathbb{R}^2 = \{(t, s): \quad t, s \in \mathbb{R}\}$. Эта алгебра Ли содержит одномерную подалгебру Ли

$$\mathfrak{h}_\alpha = \{(t, \alpha t): \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

С другой стороны, тор T^2 содержит однопараметрическую подгруппу

$$H_\alpha = \{(e^{2\pi it}, e^{2\pi i\alpha t}) : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Задача 1. Доказать, что
1) если α – рациональное число, то H_α – подмногообразие в T^2; поэтому H_α – подгруппа Ли и $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{h}_\alpha$.
2) Если α – иррациональное число, то H_α всюду плотно в T^2; то есть H_α – подгруппа, но не подгруппа Ли в T^2. Не существует подгруппы Ли в T^2, алгебра Ли которой совпадает с $\mathfrak{h}_\alpha$. Указание. Рассмотреть пересечение H_α с сечением $\{(e^{2\pi it_0}, e^{2\pi is}) : s \in \mathbb{R}\}$. Применить задачу 9(3) из раздела 4.

7 Восстановление группы Ли по её алгебре Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ алгебра Ли над полем $\mathbb{R}$. Следующая теорема дает полный ответ на вопрос о восстановлении группы Ли по ее алгебре Ли.
Теорема 7.1.
1) Существует и единственна односвязная группа Ли G_0 такая, что $\mathrm{Lie}(G_0) = \mathfrak{g}$.
2) Всякая связная группа Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ изоморфна фактор-группе G_0/Γ, где Γ дискретный нормальный делитель в G.

Напомним, что всякий дискретный нормальный делитель содержится в центре $Z(G_0)$ группы G_0 (см. раздел 4, задача 10).

Теорема позволяет не только описывать все связные группы Ли с заданной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, но и классифицировать связные группы Ли заданной размерности.

Классификация связных групп Ли размерности 1. Существует ровно одна с точностью до изоморфизма одномерная алгебра Ли. Это одномерное линейное пространство $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ с нулевым коммутатором.

Односвязную группу Ли с заданной алгеброй Ли легко угадать. Это группа вещественных чисел $G_0 = \mathbb{R}$ относительно сложения. Согласно теореме 7.1 группа G_0 единственная с точностью до изоморфизма односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$.

Для классификации всех связных групп с заданной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ надо провести классификацию дискретных нормальных делителей в G_0. Группа G_0 коммутативна. Каждая её подгруппа является нормальным делителем. Всякая дискретная подгруппы в G_0 если либо 1) $\Gamma = \{0\}$, любо 2) $\Gamma = \mathbb{Z}a$, $a \neq 0$ (см. раздел 3, задача 9(1)). В первом случае $G \cong G_0$. Во втором случае для реализации фактор-группы G_0/Γ рассмотрим гомоморфизм групп Ли $\varphi_a : \mathbb{R} \to T$, заданный

$$\varphi_a(t) = e^{2\pi i\frac{t}{a}}.$$

Ядро $\mathrm{Ker}\varphi_a$ совпадает с $\Gamma = \mathbb{Z}a$. Поэтому все фактор-группы G_0/Γ изоморфны T. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 7.2. Всякая связная одномерная группа Ли изоморфна $\mathbb{R}$ или T.

Классификация связных групп Ли размерности 2. Существуют ровно две (с точностью до изоморфизма) двумерные алгебры Ли (см. раздел 2, задача 12(1)). Это коммутативная алгебра Ли $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}^2$ и некоммутативная алгебра Ли $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$.

В первом случае $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}^2$ в качестве G_0 можно взять группу $G_0 = \mathbb{R}^2$ с операцией сложения. Эта группа коммутативна. Каждая её подгруппа является нормальным делителем. Из решения задачи 9(2) из раздела 4 вытекает, что всякая дискретная подгруппа Γ в G_0 либо тривиальная подгруппа $\{\overline{0}\}$, либо $\mathbb{Z}\overline{a}$, где $a \neq 0$, либо $\mathbb{Z}\overline{a} \oplus \mathbb{Z}\overline{b}$, где векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ линейно независимы. Фактор-группа изоморфна $\mathbb{R}^2$, или $\mathbb{R} \times T$, или T^2.

Во втором случае $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ в качестве G_0 можно взять группу $\mathrm{Aff}_+(\mathbb{R})$. Центр $Z(G_0)$ тривиален (равен $\{E\}$). Группа $\mathrm{Aff}_+(\mathbb{R})$. имеет только тривиальный дискретный нормальный делитель $\Gamma = \{E\}$. Итог классификации сформулируем в виде теоремы.

Теорема 7.3. Всякая связная двумерная группа Ли изоморфна группе плоскости $\mathbb{R}^2$, или группе цилиндра $\mathbb{R}\times T$, или группе тора T^2, или группе $\mathrm{Aff}_+(\mathbb{R})$.

8 Гомоморфизмы групп и алгебр Ли

Пусть G_1, G_2 две группы Ли с алгебрами Ли $\mathfrak{g}_1 = \mathrm{Lie}(G_1)$, $\mathfrak{g}_2 = \mathrm{Lie}(G_2)$. Пусть $\varphi : G_1 \to G_2$ гомоморфизм группы Ли G_1 в группу Ли G_2. Дифференциал $\Phi := d_e\varphi$ в единице $e \in G_1$ является линейным отображением касательных пространств $\Phi : \mathfrak{g}_1 = T_e(G_1) \to \mathfrak{g}_2 = T_e(G_2)$.

Теорема 8.1. Φ – гомоморфизм алгебр Ли.

Доказательство проведём для случая линейных групп Ли G_1 и G_2.

Пункт 1. Покажем, что для любого $g \in G_1$ и $Y \in \mathfrak{g}_1$ имеет место

$$\Phi(\mathrm{Ad}_g(Y)) = \mathrm{Ad}_{\varphi(g)}\Phi(Y). \tag{5}$$

Образ $\Phi(Y)$ элемента $Y \in \mathfrak{g}_1$ вычисляется следующим образом. Поскольку $Y \in \mathfrak{g}_1$, то существует кривая $h(t)$ такая, что

$$\forall t\ h(t) \in G_1, \quad h(0) = E \quad \text{и} \quad \left.\frac{dh(t)}{dt}\right|_{t=0} = Y.$$

По определению,

$$\Phi(Y) = d_e\varphi(Y) = \left.\frac{d\varphi(h(t))}{dt}\right|_{t=0}.$$

Поскольку φ гомоморфизм, то $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$ для любых $g_1, g_2 \in G_1$. Поэтому $\varphi(gh(t)g^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h(t))g^{-1})\varphi(g^{-1})$ для любого $g \in G_1$. Дифференцируя последнее равенство при $t = 0$, получаем

$$\Phi(\mathrm{Ad}_g Y) = \left.\frac{d\varphi(gh(t)g^{-1})}{dt}\right|_{t=0} = \varphi(g)\left.\frac{d\varphi(h(t)}{dt}\right|_{t=0}\varphi(g)^{-1} = \mathrm{Ad}_{\varphi(g)}\Phi(Y).$$

Пункт 2. Покажем, что $\Phi([X, Y]) = [\Phi(X), \Phi(Y)]$.

Для $X \in \mathfrak{g}_1$ существует кривая $g(t)$ такая, что

$$\forall t\ g(t) \in G_1, \quad g(0) = E \quad \text{и} \quad \left.\frac{dg(t)}{dt}\right|_{t=0} = X.$$

Применяя (5), получаем

$$\forall t\ \ \Phi(\mathrm{Ad}_{g(t)}(Y)) = \mathrm{Ad}_{\varphi(g(t))}\Phi(Y).$$

Дифференцируя последнее равенство при $t = 0$, получаем

$$\Phi([X, Y]) = [\Phi(X), \Phi(Y)]. \quad \square$$

Следствие 8.2. Дифференциал в единице от представления группы Ли есть представление алгебры Ли.

Задача 1. Построить пример гомоморфизма алгебр Ли Φ, для которого нет гомоморфизма группа Ли φ такого, что $\Phi = d_e(\varphi)$. Указание: рассмотреть вложение $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(T^1) \to \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(T^2)$ из примера "иррациональной "обмотки тора. Следующая теорема утверждает, что подобные примеры не могут возникать, если группа G_1 односвязна.

Теорема 8.3. Если G_1, G_2 две группы Ли и группа G_1 связная односвязная. Пусть $\Phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ гомоморфизм их алгебр Ли. Тогда существует единственный гомоморфизм групп Ли $\varphi : G_1 \to G_2$ такой, что $\Phi = d_e(\varphi)$.

Задача 2. Доказать, что дифференциал в точке E для $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ равен $\mathrm{Tr} : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Задача 3. Доказать, что дифференциал в точке e от присоединенного представления группы Ad есть присоединенное представление ad алгебры Ли.

9 Экспоненциальной отображение

Для произвольной матрицы X экспонента определяется как сумма ряда

$$\mathrm{Exp}(X) = e^X = E + X + \frac{X^2}{2!} + \ldots + \frac{X^n}{n!} + \ldots \tag{6}$$

Известно, что ряд (6) сходится для любой комплексной (в частности, вещественной) матрицы X. Пусть G – линейная группа Ли, и $\mathfrak{g}$ – её алгебра

Ли.
Теорема 9.1. Для любого $X \in \mathfrak{g}$ матрица $\mathrm{Exp}(X)$ принадлежит G.

Экспонента Exp является локальным диффеоморфизмом в окрестности нуля (т.е. взаимно однозначным гладким отображением, переводящим некоторую окрестность нуля в $\mathfrak{g}$ на некоторую окрестность единицы в G). Если Exp является диффеоморфизмом $\mathfrak{g}$ на G, то группу G называют экспоненциальной группой. Известно, что класс экспоненциальных групп содержит класс нильпотентных группы Ли и содержится в классе разрешимых групп Ли.
Задача 1. Доказать, что следующие группы Ли экспоненциальные:
$\mathrm{UT}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{T}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{Aff}_+(\mathbb{R})$.
Задача 2. Доказать, что Exp является сюрьективным отображением $\mathfrak{g}$ на G для групп Ли $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$. Показать, что ни для какой из перечисленных групп Ли Exp не является инъективным отображением.
Теорема 9.2. Для любого гомоморфизма $\varphi : G_1 \to G_2$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}_1 \arrow[r, "\Phi=d_e(\varphi)"] \arrow[d, "\mathrm{Exp}"'] & \mathfrak{g}_2 \arrow[d, "\mathrm{Exp}"'] \\ G_1 \arrow[r, "\varphi"] & G_2 \end{tikzcd},$$

где $\Phi = d_e(\varphi)$.
Следствие 9.3. Пусть $T : G \to \mathrm{GL}(V)$ представление группы Ли G в конечномерном комплексном(вещественном) пространстве V и $\tau = d_e T : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ соответствующее представление алгебры Ли. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\tau=d_e(T)"] \arrow[d, "\mathrm{Exp}"'] & \mathfrak{gl}(V) \arrow[d, "\mathrm{Exp}"'] \\ G \arrow[r, "T"] & \mathrm{GL}(V) \end{tikzcd}.$$

Заметим, что из этого следствия вытекает известное свойство экспоненциального отображения $\det e^A = e^{\mathrm{Tr} A}$.
Задача 3. Пусть G связная топологическая группа и H её подгруппа. Доказать, что, если подгруппа H открыта (как подмножество) в G, то $H = G$. Указание: рассмотреть разбиение $G = \bigcup_{g \in G} gH$ группы G на классы смежности относительно подгруппы H.
Задача 4. Доказать, что связная топологическая группа порождается произвольной своей окрестностью единицы. То есть для любой окрестности единицы U связной топологической группы G и любого $g \in G$ имеет

место разложение $g = u_1 \cdots u_s$, где каждый элемент u_i принадлежит U. Указание: доказать, что произвольная окрестность единицы порождает открытую подгруппу в группе; применить предыдущую задачу.

Теорема 9.4. Пусть T_g – представление связной группы Ли G в линейном пространстве V. Пусть W – подпространство в V. Тогда W инвариантно относительно всех операторов T_g, $g \in G$ тогда и только тогда, когда W инвариантно относительно всех операторов τ_x, $x \in \mathfrak{g}$. В частности, представление T_g группы Ли G неприводимо тогда и только тогда, когда соответствующее представление τ_x алгебры Ли $\mathfrak{g}$ неприводимо.

Доказательство. 1) Пусть подпространство W инвариантно относительно всех операторов T_g, $g \in G$. Для любого $x \in \mathfrak{g}$ и $w \in W$ имеем $T_{g(t)}w \in W$, где $g(t)$ кривая на G, такая, что $g(0) = e$ и $\frac{dg(t)}{dt}\Big|_{t=0} = x$. Дифференцируя по t, получаем

$$\tau_x w = \frac{dT_{g(t)}w}{dt}\bigg|_{t=0} \in W.$$

2) Пусть W инвариантно относительно всех операторов τ_x, $x \in \mathfrak{g}$. Из следствия 9.3 вытекает, что W инвариантно относительно всех операторов T_g, где $g \in \mathrm{Exp}(\mathfrak{g})$. Образ экспоненты содержит окрестность единицы в группе. Произвольная окрестность единицы порождает группу (задача 4). Поэтому W инвариантно относительно всех операторов T_g, $g \in G$.

10 Кватернионы и гомоморфизм $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$

Тело – это "некоммутативное поле". То есть D – тело, если D кольцо, в котором выполнены все аксиомы поля, кроме аксиомы коммутативности умножения.

Обозначим через $\mathbb{H}$ множество матриц вида

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} : \quad a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Здесь $\overline{a}$, $\overline{b}$ числа комплексно сопряженные к a,b.

Задача 1. Доказать, что $\mathbb{H}$ – тело относительно операций сложения и умножения матриц. Тело $\mathbb{H}$ называется *телом кватернионов.*

Обозначим через $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbb{H}$ следующие матрицы:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ образуют базис $\mathbb{H}$ над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Соотношения между $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ имеют вид

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}^2 = -\mathbf{1} & \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} & \mathbf{ij} = \mathbf{k} \\ \mathbf{j}^2 = -\mathbf{1} & \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} & \mathbf{jk} = \mathbf{i} \\ \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1} & \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} & \mathbf{ki} = \mathbf{j} \end{array}$$

Отождествим поле $\mathbb{R}$ с полем скалярных матриц $\mathbb{R}E$ и поле $\mathbb{C}$ с полем матриц вида

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} : \quad a \in \mathbb{C} \right\}.$$

Тогда тело $\mathbb{H}$ является расширением цепочки полей $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$.

Задача 2. Доказать, что $\mathbb{R}$ центр $\mathbb{H}$.

Всякий кватернион α однозначно записывается в виде $\alpha = x_0\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$, где $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Кватернионы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ называют *мнимыми единицами* и кватернионы вида $x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ – *чисто мнимыми кватернионами.*

Скалярное произведение кватернионов $\alpha = x_0\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ и $\beta = y_0\mathbf{1} + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}$ определяется $(\alpha, \beta) = x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. *Модуль* кватерниона определяется

$$|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Кватернион $\overline{\alpha} = x_0\mathbf{1} - x_1\mathbf{i} - x_2\mathbf{j} - x_3\mathbf{k}$ назовём *сопряженным* α.

Задача 3. Доказать, что

1) $|\alpha|^2 = \det \alpha$, 2) $\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2$, 3) $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

Группа кватернионов, модулю которых равен единице, совпадает с группой $\mathrm{SU}(2)$ (раздел 4, задача 1). Эта группа гомеоморфна трёхмерной сфере (как топологическое пространство) и, следовательно, является связной односвязной. Следующая наша цель – построить гомоморфизм $\phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.

Рассмотрим представление ϕ_g группы $\mathrm{SU}(2)$ в линейном пространстве $\mathbb{H}$ по формуле $\phi_g(x) = gxg^{-1}, \quad x \in \mathbb{H}, \ g \in \mathrm{SU}(2)$.

Представление ϕ_g сохраняет скалярное произведение в $\mathbb{H}$ и, поэтому, определяет гомоморфизм $\phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{O}(4, \mathbb{R})$. Вектор $\mathbf{1}$ неподвижен относительно ϕ_g. Отсюда, подпространство чисто мнимых кватернионов $W = \mathbf{1}^\perp = \{x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}\}$ инвариантно относительно ϕ_g.

Ограничение ϕ_g на подпространство W определяет гомоморфизм $\phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{O}(3, \mathbb{R})$. Так как $\mathrm{SU}(2)$ связное многообразие, то и его образ связен. Поскольку $\phi(E) = E$, то $\phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.

Теорема 10.1.

1) $\mathrm{Ker}\phi = \pm E$, 2) $\mathrm{Im}\phi = \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, 3) $\mathrm{SU}(2)/\pm E \cong \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.

Задача 4. Доказать, что $\mathrm{Ker}\phi = \pm E$.

Пункт 3) является следствием 1) и 2). Для доказательство 2) нам понадобятся следующие задачи 5 и 6.

Задача 5. Пусть $\alpha = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \in W$, $\beta = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k} \in W$. Доказать, что

1) $\alpha\beta = -(\alpha, \beta) + [\alpha, \beta]$, 2) если $\alpha \perp \beta$, то $\alpha\beta = [\alpha, \beta]$.

Задача 6. Любой кватернион $g \in \mathrm{SU}(2)$ имеет представление в виде $g = \cos\theta + p\sin\theta$, где $\theta \in \mathbb{R}$, $p \in W$ и $|p| = 1$.

Предложение 10.2. Пусть $p, v \in W$, $|p| = 1$ и $p \perp v$. Как выше $g = \cos\theta + p\sin\theta \in \mathrm{SU}(2)$. Тогда

1) $gv \in W$ и gv получается из v поворотом плоскости $p^\perp$ на угол θ против часовой стрелки (с позиции наблюдателя, расположенного вдоль вектора p); 2) $vg^{-1} \in W$ и vg^{-1} получается из v аналогичным поворотом.

Доказательство вытекает из $gv = v\cos\theta + pv\sin\theta = v\cos\theta + [p, v]\sin\theta$.

Следующее следствие завершает доказательство пункта 2) теоремы.

Следствие 10.3. Преобразование $\phi_g : W \to W$ поворот в W на угол 2θ против часовой стрелки вокруг вектора p.

Задача 7. Доказать, что существует ровно две (с точностью до изоморфизма) связные группы Ли с алгеброй Ли Vect_3. Указание: воспользоваться изоморфизмом Vect_3 и $\mathfrak{o}(3, \mathbb{R})$ (см. раздел 2, Задача 6).

Задача 8. Доказать, что группа $\mathrm{SO}(4, \mathbb{R})$ изоморфна фактор-группе $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ по $\{(E, E), (-E, -E)\}$. Указание: рассмотреть представление $\psi_{g,h}(x) = gxh$ группы $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ в пространстве $\mathbb{H}$.

11 Инвариантные меры на группах Ли

Под *мерой* на топологическом пространстве мы понимаем неотрицательную счетно-аддитивную функцию множества, для которой каждый компакт измерим. Говорят, что мера μ_l на топологической группе G *левоинвариантна*, если $\mu_l(gU) = \mu_l(U)$ для любого измеримого подмножества U и любого $g \in G$. Соответственно, мера μ_r *правоинвариантна*, если $\mu_r(Ug) = \mu_r(U)$. Говорят, что мера инвариантна, если она право- и левоинвариантна одновременно. Вопрос о существовании инвариантных мер на топологических группах решается следующей теоремой.

Теорема Хаара. На всякой локально компактной топологической группе существует левоинвариантная (соотв. правоинвариантная) мера. Эта мера единственна с точностью до положительного коэффициента.

Примером инвариантной меры является мера Лебега на $\mathbb{R}$. Интеграл по левоинвариантной мере $I_l(f) = \int_G f(x)d\mu_l(x)$ удовлетворяет свойству

$$\int_G f(gx)d\mu_l(x) = \int_G f(x)d\mu_l(x)$$

для любого $g \in G$. Соответственно, интеграл по правоинвариантной мере $I_r(f) = \int_G f(x)d\mu_r(x)$ удовлетворяет свойству

$$\int_G f(xg)d\mu_r(x) = \int_G f(x)d\mu_r(x)$$

для любого $g \in G$.

Если μ_l левоинвариантная мера, то для любого $g \in G$ мера $\mu_l(Ug)$ также левоинвариантна и, согласно теореме Хаара, существует положительная константа $\Delta(g)$ такая, что

$$\mu_l(Ug) = \Delta(g)\mu_l(U)$$

для любого измеримого подмножества U. Функция $\Delta(g)$ непрерывна. Функция $\Delta(g)$ называется модулем (или левым модулем) на группе G.

Задача 1. Доказать, что $\Delta : G \to \mathbb{R}_+$ гомоморфизм G в группу положительных чисел $\mathbb{R}_+$ с операцией умножения.

Аналогично левому модулю определяется правый модуль

$$\mu_r(gU) = \Delta_r(g)\mu_r(U).$$

Говорят, что группа G унимодулярная, если всякая её левоинвариантная мера правоинвариантна (то есть $\Delta(g) = \Delta_r(g) = 1$ для любого $g \in G$). Очевидным примером унимодулярной группы является всякая коммутативная локально компактная группа. Другой класс унимодулярных групп составляют компактные группы.

Предложение 11.1. Всякая компактная топологическая группа унимодулярна.

Доказательство. Так как $\Delta : G \to \mathbb{R}_+$ – непрерывный гомоморфизм, то образ $\mathrm{Im}\Delta$ – компактная подгруппа в $\mathbb{R}_+$. Группа $\mathbb{R}_+$ имеет единственную компактную подгруппу – тривиальную подгруппу $\{1\}$. Поэтому, $\Delta(g) = 1$ для любого $g \in G$. $\Box$

В общем случае вопрос о связи лево- и правоинвариантных мер решается следующим утверждением.

Предложение 11.2. $d\mu_r(x) = \Delta(x^{-1})d\mu_l(x)$ (равенство определено с точностью до коэффициента).

Доказательство. Достаточно доказать, что интеграл по мере $\Delta(x^{-1})d\mu_l(x)$ правоинвариантен. Действительно,

$$\int_G f(xg)\Delta(x^{-1})d\mu_l(x) = \int_G f(xg)\Delta((xg)^{-1})\Delta(g)d\mu_l(x) =$$

$$\int_G f(xg)\Delta((xg)^{-1})d\mu_l(xg) = [y = xg] = \int_G f(y)\Delta(y^{-1})d\mu_l(y).$$

□

Следствие 11.3. $\mu_r(U) = \int_U \Delta(x^{-1})d\mu_l(x)$.

Предложение 11.4. $\Delta_r(g) = \Delta(g^{-1})$.

Доказательство.

$$\mu_r(gU) = \int_{gU} \Delta(x^{-1})d\mu_l(x) = [x = gu] = \int_U \Delta((gu)^{-1})d\mu_l(gu) =$$

$$\Delta(g^{-1})\int_U \Delta(u^{-1})d\mu_l(u) = \Delta(g^{-1})\mu_r(U)$$

□

На связной группе Ли инвариантные (левые и правые) меры задаются инвариантными формами объёма (т.е. дифференциальными формами наибольшего порядка). Пусть $L_g(x) = gx$ (соотв. $R_x(x) = gx$) преобразования левого (соотв. правого) сдвига на группе G. Напомним, что дифференциальная форма ω на группе Ли G называется левоинвариантной, если для любого $g \in G$ она совпадает со своим обратным образом $L_g^*\omega$. Это означает, что левоинвариантная дифференциальная форма однозначно определяется своим значением в единице группы. Левоинвариантная форма объема единственна с точностью до положительного коэффициента. Тоже верно для правоинвариантной формы объёма $V_r(g)$. Формы объёма связаны соотношением

$$V_r(g) = \Delta(g^{-1})V_l(g). \tag{7}$$

Предложение 11.5. $\Delta(g) = (\det \mathrm{Ad}_g)^{-1}$.

Доказательство. Пусть $V(e)$ форма объёма на касательном пространстве $T_e(G)$. Подставляя $V_r(g) = R^*_{g^{-1}}V(e)$ и $V_l(g) = L^*_{g^{-1}}V(e)$ в (7), получаем:

$$R^*_{g^{-1}}V(e) = \Delta(g^{-1})L^*_{g^{-1}}V(e), \quad L^*_g R^*_{g^{-1}}V(e) = \Delta(g^{-1})V(e),$$
$$\mathrm{Ad}^*_g V(e) = \Delta(g^{-1})V(e).$$

Окончательно, $\det \mathrm{Ad}^*_g = \Delta(g^{-1})$. □

Следствие 11.6. Связная группа Ли унимодулярна тогда и только тогда, когда $\det \mathrm{Ad}_g = 1$ для любого $g \in G$.

Для построения левоинвариантной формы объёма предлагается следующий метод. Пусть G линейная группа Ли размерности n. То есть G – подгруппа Ли в $\mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$ для некоторого N. Рассмотрим $N \times N$-матрицу

$$\Omega_l(g) = g^{-1}dg,$$

где dg матрица размера $N \times N$, составленная из матричных элементов $(dg)_{ij} = d(g_{ij})$. Элементы матрицы $\Omega_l(g)$ – левоинвариантные дифференциальные 1-формы. Действительно,

$$\Omega_l(g_0g) = (g_0g)^{-1}d(g_0g) = g^{-1}g_0^{-1}g_0dg = \Omega_l(g).$$

Извлечем систему из n линейно независимых дифференциальных 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_n$ из матрицы $\Omega_l(g)$. Тогда $\omega_1, \dots, \omega_n$ – базис в пространстве левоинвариантных дифференциальных 1-форм. Мы можем построить левоинвариантную форму объема

$$V_l = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n.$$

Построение правоинвариантной формы объёма проводится аналогично, рассматривая матрицу

$$\Omega_r(g) = (dg)g^{-1}.$$

Приведём примеры построения инвариантных мер.

Пример 1. Группа $\mathbb{R}^n$ с операцией сложения; инвариантная форма объёма $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$,

Пример 2. Группа положительных чисел $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : \ a > 0\}$; инвариантная форма объёма $a^{-1}da$.

Пример 3. Группа окружности $T = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} : \ \varphi \in \mathbb{R} \right\}$. Инвариантная мера относительно локальной координаты φ равна $d\varphi$.

Задача 2. Доказать, что инвариантная форма объёма на окружности $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ равна $xdy - ydx$.

Пример 4. $G = \mathrm{Aff}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$. Вычислим

$$\Omega_l(g) = g^{-1}dg = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} da & db \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1}da & a^{-1}db \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Формы $\omega_1 = a^{-1}da$, $\omega_2 = a^{-1}db$ составляет базис в пространстве левоинвариантных 1-форм. Левоинвариантная форма объёма равна $V_l(g) = \omega_1 \wedge \omega_2 = a^{-2}da \wedge db$. Аналогично вычисляем правоинвариантную форму объёма

$$\Omega_r(g) = (dg)g^{-1} = \begin{pmatrix} da & db \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1}da & -a^{-1}bda + db \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Формы $\omega_1' = a^{-1}da$, $\omega_2' = -a^{-1}bda + db$ составляет базис в пространстве правоинвариантных 1-форм. Правоинвариантная форма объёма равна $V_r(g) = \omega_1' \wedge \omega_2' = a^{-1}da \wedge db$. Группа Aff_+ не унимодулярна, поскольку $\Delta(g) = a^{-1}$.

Задача 3. Доказать, что группа собственных движений евклидовой плоскости

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & a \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

унимодулярна и её инвариантная форма объёма равна $d\varphi \wedge da \wedge db$.

Задача 4. Доказать, что группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{g = (x_{ij})_{ij=1}^n : \det(g) \neq 0\}$ унимодулярна и её инвариантная форма объёма равна

$$V(g) = \det(g)^{-n} \bigwedge_{i,j=1}^{n} dx_{ij}.$$

Задача 5. Доказать, что группа $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{g = (x_{ij})_{ij=1}^n : \det(g) = 1\}$ унимодулярна и её инвариантная форма объёма равна $S_1 \wedge S_2$, где

$$S_1 = \bigwedge_{i,j=1}^{n,n-1} dx_{ij}, \quad S_2 = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} x_{in} dx_{1n} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{in}} \wedge \ldots \wedge dx_{nn}.$$

12 Некоторые сведения из теории представлений групп

Пусть G группа и V линейное пространство над $\mathbb{C}$. Напомним, что *представление* группы G в линейном пространстве V это гомоморфизм $T : G \to \mathrm{GL}(V)$ группы G в группу $\mathrm{GL}(V)$ обратимых линейных операторов V. Мы будем считать в этом разделе все представления конечномерными.

Представление группы Ли (соотв. топологической группы) это гладкое (соотв. непрерывное) представление.

Для любого инвариантного подпространства $W \subset V$ определено представление $T_g|_W$ в W, которое называют *подпредставлением* T_g. Естественное представление в факторпространстве V/W называют *факторпредставлением*.

Представление T_g неприводимо, если $V \neq 0$ и в V нет других подпредставлений кроме тривиальных (т.е. $W = \{0\}$ и $W = V$).

Лемма Шура. Пусть T_g и R_g два неприводимых представления группы G в линейных пространствах V и W. Пусть $S : V \to W$ линейных оператор такой, что $R_g S = S T_g$ для любого $g \in G$ (называют сплетающим оператором). Утверждается, что S либо нулевой оператор, либо изоморфизм.

Доказательство. Ker$S$ – инвариантное подпространство в V. Поэтому Ker$S = \{0\}$ или Ker$S = V$. Аналогично, ImS –инвариантное подпространство в W и либо Im$S = \{0\}$, либо Im$S = W$. Если Ker$S = V$, то Im$S = \{0\}$ и S нулевой оператор. Если Ker$S = 0$, то Im$S = W$ и S – изоморфизм V на W. □

Следствие 12.1. Пусть T_g неприводимое представление группы G в линейном пространстве V, и $S : V \to V$ – сплетающий оператор. Тогда S скалярный оператор (т.е. $S = \alpha\,\mathrm{id}$).

Доказательство. Пусть α собственное значение для S. Поскольку S сплетающий оператор, то и $S - \alpha\,\mathrm{id}$ сплетающий оператор. Согласно, лемме Шура сплетающий оператор нулевой или обратимый. Оператор $S - \alpha\,\mathrm{id}$ имеет ненулевое ядро (пространство собственных векторов для S с собственным значением α). Поэтому $S - \alpha\,\mathrm{id} = 0$ и $S = \alpha\,\mathrm{id}$. $\square$

Следствие 12.2. Всякое неприводимое представление коммутативной группы одномерно.

Доказательство. Для каждого $g_0 \in G$ оператор T_{g_0} является сплетающим оператором T_g. Из предыдущего следствия все операторы T_{g_0} скалярны. Представление T_g неприводимо только в случае, если $\dim T_g = 1$. $\square$

Для представлений T_g, R_g группы G в пространствах V, U можно определить естественные представления группы G в прямой сумме $V \oplus U$ и тензорном произведении $V \otimes U$ по формулам: $T_g \oplus R_g(v + u) = T_g v + R_g u$ и $T_g \otimes R_g(v \otimes u) = T_g v \otimes R_g u$. Эти конструкции позволяют строить новые представления по данным представлениям.

Определение 12.3. Говорят, что представление *вполне приводимо*, если его можно разложить в прямую сумму неприводимых подпредставлений.

Следующее утверждение является следствием леммы Шура.

Предложение 12.4. Пусть представление группы G в линейном пространстве V является прямой суммой попарно неизоморфных подпредставлений $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$. Тогда

1) всякое неприводимое подпредставление W в V совпадает с одним из W_i;

2) всякое подпредставление U является прямой суммой $U = W_{i_1} \oplus \ldots \oplus W_{i_s}$ некоторого набора $1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq k$.

Доказательство. 1) Пусть W неприводимое подпредставление. Для любого t естественная проекция $\pi_t : W \to W_t$ является сплетающим оператором. Из леммы Шура π_t нулевое отображение или изоморфизм. В последнем случае неприводимые представления W и W_t эквивалентны. Поскольку $\{W_t\}$ попарно не эквивалентны, то существует единственный номер t_0 такой, что $\pi_t = 0$ для любого $t \neq t_0$. Отсюда $W = W_{t_0}$.

2) Подпредставление U разлагается в виде суммы подпредставлений $U = U' \oplus U''$, где U' сумма некоторых из $\{W_i\}$, а U'' не содержит никакого W_i. Если $U'' \neq 0$, то U'' содержит неприводимое подпредставление, которое согласно пункту 1) совпадает с одним из W_i. Противоречие. Следовательно, $U'' = 0$ и $U = U'$. $\square$

Не всякое представление вполне приводимо. В качестве примера рассмотрим группу $\mathbb{R}$ относительно сложения и представление $t \mapsto e^{tA}$, где A матрица. Это представление вполне приводимо только в случае, если матрица A диагонализируема.

Определение 12.5. Пусть V унитарное пространство и T_g представление группы G в V. Говорят, что представление T_g *унитарно*, если все операторы T_g унитарные. То есть $(T_g u, T_g v) = (u, v)$ для любых $u, v \in W$.

Предложение 12.6. Всякое унитарное представление вполне приводимо.

Доказательство основано на свойстве унитарного оператора: если подпространство инвариантно относительно унитарного оператора, то его ортогональное дополнение также инвариантно. □

Теорема 12.7. Всякое представление компактной группы вполне приводимо.

Доказательство. Пусть V пространство представления T_g компактной группы G. Рассмотрим произвольное скалярное произведение (u, v) в V. Определим новое скалярное произведение по формуле

$$(u, v)_G = \int_G (T_g u, T_g v) d\mu(g),$$

где интегрирование берётся относительно инвариантной меры μ. Представление T_g унитарное относительно $(u, v)_G$:

$$(T_{g_0} u, T_{g_0} v)_G = \int_G (T_g T_{g_0} u, T_g T_{g_0} v) d\mu(g) =$$

$$\int_G (T_{gg_0} u, T_{gg_0} v) d\mu(g) = \int_G (T_g u, T_g v) d\mu(g) = (u, v)_G.$$

Согласно предложению 12.6 представление T_g вполне приводимо. □

Задача 1. Доказать, что $\mathfrak{su}(n) \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

Теорема 12.8. Всякое представление группы Ли $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ вполне приводимо.

Доказательство основано на "унитарном трюке" Г.Вейля и годится для таких комплексных линейных групп как $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$. Пусть T_g представление группы Ли $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ в линейном пространстве V, и $\tau = d_e T$ – соответствующее представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Так как группа $\mathrm{SU}(n)$ компактна, то ограничение представления $T_g \big|_{\mathrm{SU}(n)}$ вполне приводимо. Пространство V разлагается в прямую сумму $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ инвариантных неприводимых подпространств W_i относительно операторов T_g, $g \in \mathrm{SU}(n)$. Тогда каждое W_i инвариантно и неприводимо относительно операторов τ_x, $x \in \mathfrak{su}(n)$ (см. теорема 9.4). Из задачи 1 этого раздела вытекает, что W инвариантно и неприводимо относительно операторов τ_x, $x \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ и, следовательно, относительно операторов T_g, $g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$.□

13 Неприводимые представления $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, $\mathrm{SU}(2)$ и $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$

Наша первая цель – классифицировать неприводимые представления комплексной алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, как линейное пространство над $\mathbb{C}$, имеет базис Картана $\{E_+, E_-, H\}$ (см. раздел 2), где $E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Структурные соотношения имеют вид $[H, E_\pm] = \pm 2E_\pm$, $[E_+, E_-] = H$.

Теорема 13.1. Пусть τ неприводимое комплексное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ в линейном пространстве V. Утверждается, что существует базис $\{v_0, \ldots, v_n\}$ в V такой, что

$$\begin{cases} \tau(E_+)v_i = i(n-i+1)v_{i-1} \\ \tau(E_-)v_i = v_{i+1} \\ \tau(H)v_i = (n-2i)v_i \end{cases} \tag{8}$$

Доказательство.
1) Линейный оператор $\tau(H)$ имеет в V по крайней мере один собственный вектор: $\tau(H)v = \mu v$, $v \neq 0$. Тогда

$$\tau(H)\tau(E_+)v = \tau(E_+)\tau(H)v + [\tau(H), \tau(E_+)]v = (\mu+2)\tau(E_+)v.$$

Отсюда $\tau(H)\tau^s(E_+)v = (\mu+2s)\tau^s(E_+)v$ для любого натурального s. Существует s_0, для которого $\tau^{s_0}(E_+)v = 0$. В противном случае система векторов $\{\tau^s(E_+)v\}_{s\in\mathbb{N}}$ линейно независима как система собственных векторов с различными собственными значениями. Это противоречит конечномерности пространства V.

Мы доказали существование ненулевого вектора $v_0 \in V$ такого, что

$$\begin{cases} \tau(E_+)v_0 = 0 \\ \tau(H)v_0 = \lambda v_0 \end{cases} \tag{9}$$

Ненулевой вектор, удовлетворяющий (9) называется *старшим вектором* и λ *старшим весом* представления τ.

2) Рассмотрим систему векторов $\{v_i = \tau^i(E_-)v_0\}_{i\in\mathbb{N}}$. Аналогично показывается, что $\tau(H)v_i = (\lambda - 2s)v_i$.

Задача 1. Индукцией по i показать, что

$$\tau(E_+)v_i = i(\lambda - i + 1)v_{i-1}. \tag{10}$$

3) Пусть m наименьший номер такой, что $v_m = 0$. Выпишем (10) для $i = m$. Получаем $0 = \tau(E_+)v_m = m(\lambda - m + 1)v_{i-1}$. Отсюда $m = \lambda + 1$. В частности, $\lambda \in 0, 1, 2, \ldots$. Обозначая $\lambda = n$, получаем формулы (8) для системы векторов $v_0, \ldots, v_n$.

4) Из (8) вытекает, что подпространство W натянутое на систему векторов $v_0, \dots, v_n$ инвариантно относительно представления τ. Поэтому $W = V$.
5) Непосредственной проверкой убеждается, что формулы (8) для любого n задают представление $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.
Задача 2. Доказать, что для всякого n представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, заданное формулами (8) неприводимо. $\square$
Следствие 13.2. Для всякого натурального числа n существует ровно одно (с точностью до эквивалентности) неприводимое комплексное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ размерности n – это представление, заданное формулами (8).

Перейдем к классификации неприводимых представлений перечисленных (в заголовке раздела) групп Ли. Как мы видели в разделе 4, группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ односвязна. Поэтому её неприводимые представления находятся в однозначном соответствии с представлениями алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ (то есть алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, рассмотренной над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$).

Пусть V_n пространство линейное пространство многочленов от x, y суммарной степени n. Формула

$$T_n(g)f(x,y) = f(ax+cy, bx+dy), \text{ где } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \qquad (11)$$

задаёт представление $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ в V_n размерности $n+1$. Вычислим дифференциал $\tau_n = d_e T_n$ представления T_g в единице. Получаем $\tau_n(E_+) = x\frac{\partial}{\partial y}$, $\tau_n(E_-) = y\frac{\partial}{\partial x}$, $\tau_n(H) = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$. Обозначим $v_0 = x^n, v_1 = x^{n-1}y, \dots, v_n = y^n$. Легко проверяется справедливость формул (8) для представления τ_n и базиса $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$. Поэтому представление τ_n является неприводимым представлением алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ со старшим весом n.

Рассмотрим также комплексно-сопряженное представление

$$\overline{T}_n(g)f(x,y) = f(\bar{a}x + \bar{c}y, \bar{b}x + \bar{d}y), \text{ где } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}).$$

Будем обозначать пространство этого представления через $\overline{V_n}$ (хотя оно очевидно совпадает с V_n). Дифференциал этого представления $\overline{\tau}_n$ – неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ в пространстве $\overline{V}_n$.
Задача 3. Доказать, что комплексификация вещественной алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ изоморфна прямой сумме $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.
Теорема 13.3.
1) Всякое неприводимое алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ эквивалентно тензорному произведению $\tau_n \otimes \overline{\tau}_m$ в пространстве $V_n \otimes \overline{V}_m$.
2) Всякое неприводимое представление группы Ли $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ эквивалентно

тензорному произведению $T_n \otimes \overline{T}_m$ в пространстве $V_n \otimes \overline{V}_m$.

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из последней задачи, утверждение 2) – из 1) и односвязности группы Ли $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. $\Box$

Следствие 13.4. Всякое неприводимое представление группы Ли $\mathrm{SU}(2)$ эквивалентно одному из представлений

$$T_n(g)f(x,y) = f(ax+cy, bx+dy), \text{ где } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2). \qquad (12)$$

Доказательство. Из теоремы 8.3 вытекает, что представления группы Ли $\mathrm{SU}(2)$ однозначно соответствуют представлениям ее алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$, из задачи 1 предыдущего раздела – комплексные представления $\mathfrak{su}(2)$ однозначно соответствуют представлениям $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. $\Box$

Следствие 13.5. Всякое неприводимое представление группы $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ имеет нечетную размерность. Для произвольного числа $2m+1$ существует ровно одно (с точностью до эквивалентности) неприводимое представление группы $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ размерности $2m+1$.

Доказательство. Согласно теореме 10.1, всякое неприводимое представление P группы $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ продолжается до некоторого неприводимого представления $T_n = P\phi$ группы $\mathrm{SU}(2)$. Отображение $P \to T_n$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между неприводимыми представлениями группы $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ и неприводимыми представлениями группы $\mathrm{SU}(2)$, для которых $T_n(E) = T_n(-E)$. Из формулы (12) последнее условие выполнено только в случае нечетной размерности. $\Box$

Отождествим группу $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ с подгруппой в $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, оставляющей неподвижным первый вектор стандартного базиса:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \right\}_{t \in \mathbb{R}} \qquad (6)$$

Следствие 13.6. Всякое неприводимое представление группы $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ имеет единственный с точностью до константы неподвижный вектор относительно $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть P неприводимое представление $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ и $\pi = d_e P$ неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{o}(3, \mathbb{R})$. Рассмотрим гомоморфизм групп Ли $\phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ из раздела 10. Дифференциал $\Phi = d_e\phi : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{o}(3, \mathbb{R})$ является изоморфизмом алгебр Ли. Представление π продолжается до представления $\tau = \pi\Phi$ алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ в пространстве V_n. Представление τ является ограничением на $\mathfrak{su}(2)$ неприводимого представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Из формул (8) видно, что в пространстве V_n существует базис из собственных векторов оператора

$\tau(H)$ с собственными значениями $n, n-2, \ldots, 2, 0, -2, \ldots, -(n-2), -n$. В частности, существует единственный с точностью до константы вектор f_0, аннулируемый $\tau(H)$. Обозначим $A = \Phi(iH)$. Имеем $\pi(A)f_0 = \pi\Phi(iH)f_0 = \tau(iH)f_0 = 0$. Тогда вектор f_0 неподвижен относительно однопараметрической подгруппы $\{\exp(tA)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Существует $R \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ такое, что

$$RAR^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix},$$

для некоторого $a \neq 0$ (см. раздел 2, задача 13). Вектор Rf_0 неподвижен для подгруппы $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$. $\square$

Задача 4. Разложить следующие представления группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ в пространстве $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$ прямую сумму неприводимых представлений a) $T_g(A) = gAg^{-1}$; b) $T_g(A) = gAg^t$.

Задача 5. Доказать формулу разложения тензорного произведения $V_n \otimes V_m, \quad n > m$, в прямую сумму неприводимых представлений

$$V_n \otimes V_m = V_{n+m} \oplus V_{n+m-2} \oplus V_{n+m-4} \oplus \ldots \oplus V_{n-m}.$$

Задача 6.

1) Доказать, что подалгебра $\mathfrak{g}'$, натянутая на 3×3-матрицы $E_{12}+E_{23}$, $2(E_{11}-E_{33})$, $2(E_{21}+E_{32})$, изоморфна $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

2) Разложить представление $\tau_X(A) = [X, A]$ алгебры Ли $\mathfrak{g}'$ в пространстве $\mathrm{Mat}(3,\mathbb{C})$ прямую сумму неприводимых представлений.

Задача 7. Пусть τ представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ в пространстве V_n. Определим представление $\rho_X(\varphi) = [\tau_X, \varphi]$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ в пространстве линейных операторов $\mathcal{L}(V_n)$. Доказать, что

$$\mathcal{L}(V_n) = V_0 \oplus V_2 \oplus V_4 \oplus \ldots \oplus V_{2n}.$$

Задача 8. Доказать следующую формулу разложения тензорного произведения $V_1^{\otimes n}$ стандартного двумерного представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$:

$$V_1^{\otimes n} = V_n \oplus m_1 V_{n-2} \oplus m_2 V_{n-4} \oplus \ldots, \quad \text{где } m_k = C_n^k - C_n^{k-1}.$$

В частности, $V_1^{\otimes 3} = V_3 \oplus 2V_1$, $V_1^{\otimes 4} = V_4 \oplus 3V_2 \oplus 2V_0$.

14 Гармонические многочлены и неприводимые представления $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$

В этом параграфе будет найдена реализация неприводимых представлений группы $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ в пространствах гармонических многочленов. Рассмотрим пространство комплексных многочленов $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ на $\mathbb{R}^3$.

Обозначим $\mathcal{P}_k$ подпространство $\mathcal{P}$, состоящее из многочленов суммарной степени k.

В пространстве $\mathcal{P}$ определено представление группы $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ по формуле $T_g f(\mathbf{x}) = f(g^{-1}\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ и $g \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$.

Задача 1. Доказать, что оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ коммутирует с операторами представления.

Будем использовать обозначение $\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$ для $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$. Для произвольного многочлена $f(\mathbf{x}) = \sum_k a_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}$ рассмотрим дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$\partial_f = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial x_2^{k_2}} \frac{\partial^{k_3}}{\partial x_3^{k_3}}.$$

Рассмотрим эрмитову форму $(f_1, f_2) = \partial_{f_1} \overline{f_2}(0,0,0)$, где $\overline{f_2}$ – комплексно сопряженный многочлен для f_2.

Задача 2. Доказать, что

1) $(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}, \mathbf{x}^{\mathbf{m}}) = 0$ для $\mathbf{k} \neq \mathbf{m}$ и $(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}, \mathbf{x}^{\mathbf{m}}) = k_1! k_2! k_3!$ для $\mathbf{k} = \mathbf{m}$;

2) (f_1, f_2) – скалярное произведение на $\mathcal{P}$;

3) $(T_g f_1, T_g f_2) = (f_1, f_2)$ для любых $f_1, f_2 \in \mathcal{P}$.

Задача 3. Доказать, что

1) сопряженный оператор к $\frac{\partial}{\partial x_i}$ совпадает с оператором умножения на x_i,

2) сопряженный оператор к оператору Лапласа Δ совпадает с оператором умножения на $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Определение 14.1. Говорят, что $f \in \mathcal{P}$ – *гармонический* многочлен, если $\Delta f = 0$.

Подпространство гармонических многочленов $\mathcal{H}$ инвариантно относительно операторов представления T_g. Обозначим $\mathcal{H}_n = \mathcal{H} \cap \mathcal{P}_n$. Пространство $\mathcal{H}$ разлагается $\mathcal{H} = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$ и каждое $\mathcal{H}_n$ инвариантно относительно T_g.

Для произвольного линейного оператора ϕ имеет место равенство $\mathrm{Ker}\phi = (\mathrm{Im}\phi^*)^{\perp}$. Для $\phi = \Delta$ получаем

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{H}_n \oplus r^2 \mathcal{P}_{n-2}, \tag{13}$$

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{H}_n \oplus r^2 \mathcal{H}_{n-2} \oplus r^4 \mathcal{H}_{n-4} \oplus \ldots \tag{14}$$

Предложение 14.2. Представление T_g группы $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ в подпространстве $\mathcal{H}_n$ неприводимо для любого n.

Доказательство. Достаточно показать, что подпространство

$$\mathcal{H}_n^0 = \{ f \in \mathcal{H}_n : \quad T_g f = f, \ \forall g \in \mathrm{SO}(2,\mathbb{R}) \}$$

одномерно.

Задача 4. Обозначим $\rho^2 = x_2^2 + x_3^2$ и $\delta = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$. Доказать, что $\delta(\rho^{2k}) = 4k^2\rho^{2(k-1)}$.

Многочлены $x_1^n,\ x_1^{n-2}\rho^2,\ x_1^{n-4}\rho^4, \ldots$ образуют базис в подпространстве многочленов из $\mathcal{P}_n$, инвариантных относительно $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$. Всякий многочлен $f \in \mathcal{H}_n^0$ разлагается

$$f = a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-2}\rho^2 + a_2 x_1^{n-4}\rho^4 + \ldots$$

и удовлетворяет уравнению

$$0 = \Delta f = \sum_k (a_k(n-2k)(n-2k-1) + 4a_{k+1}(k+1)^2) x_1^{n-2k-2}\rho^{2k}.$$

Система линейных однородных уравнений $a_k(n-2k)(n-2k-1) + 4a_{k+1}(k+1)^2 = 0$ имеет единственное с точностью до константы решение. $\Box$

Предложение 14.3. $\dim \mathcal{H}_n = 2n+1$.

Доказательство. Из (13) вытекает $\dim \mathcal{H}_n = \dim \mathcal{P}_n - \dim r^2\mathcal{P}_{n-2} = \dim \mathcal{P}_n - \dim \mathcal{P}_{n-2} = \dim \mathcal{P}_n - \dim x_1^2\mathcal{P}_{n-2} = 2n+1$. $\Box$

Из следствий 13.5, 13.6 получаем следующую теорему.

Теорема 14.4. Всякое неприводимое представление группы $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ эквивалентно одному из представлений $\mathcal{H}_n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$.

15 Сферические функции

Группа $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ при своем действии в $\mathbb{R}^3$ оставляет инвариантным единичную сферу

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) :\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{E} = \mathbb{C}[S^2]$ регулярных функций на сфере S^2. Напомним, что, по определению, регулярная функция получается из ограничения многочлена на сферу S^2. Сохраним обозначение T_g для естественного представления $T_g f(s) = f(g^{-1}s)$ группы вращений в пространстве $\mathcal{E}$. Соответствие ограничения $\mathrm{res} : f \to f|_{S^2}$ является сплетающим оператором $\mathcal{P} \to \mathcal{E}$.

Определение 15.1. Подпространства $\mathrm{res}(\mathcal{H}_n) = \mathcal{E}_n$ называют подпространствами *сферических функций Лапласа*. Если дополнительно функция неподвижна относительно $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$, то она называется *зональной сферической функцией Лапласа*.

Из формулы (14) предыдущего раздела получаем

Предложение 15.2. Представление T_g неприводимо в $\mathcal{E}_n$ для любого $n =$

$0, 1, 2, \ldots$ и $\dim \mathcal{E}_n = 2n + 1$. Представление в $\mathcal{E}$ разлагается в прямую сумму $\mathcal{E} = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n$.

Представление T_g в $\mathcal{E}$ унитарное относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} f_1(s) \overline{f_2}(s) ds, \tag{15}$$

где ds инвариантная мера.

Предложение 15.3. Подпространства сферических функций Лапласа попарно ортогональны.

Доказательство. Применяя предложение 12.4 к $V = \mathcal{E}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}_n$, заключаем $\mathcal{E}_n^{\perp} = \mathcal{E}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}_{n-1}$. Отсюда $\mathcal{E}_n \perp \mathcal{E}_m$ для всех n, m. $\square$

Следующая цель – получить явную формулу для зональной сферической функции Лапласа. Рассмотрим параметризацию сферы S^2 углами Эйлера: $x_1 = \sin \psi$, $x_2 = \cos \psi \cos \phi$, $x_3 = \cos \psi \sin \phi$, где $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$, $0 < \phi < \pi$. Функции, инвариантные относительно $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$, зависят только от координаты $x = x_1$ и скалярное произведение (15) для них вычисляется по формуле

$$(f_1, f_2) = \int_0^{2\pi} f_1(sin\psi) \overline{f_2}(\sin \psi) \cos \psi d\psi = \int_{-1}^{1} f_1(x) \overline{f_2}(x) dx. \tag{16}$$

Предложение 15.4. Система зональных сферических функций Лапласа $Q_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ получаются из системы $1, x, x^2, \ldots$ применением процесса ортогонализации относительно скалярного произведения (16).

Замечание. Эта система полиномов была известна задолго до появления зональных сферических функций. Старое название – система полиномов Лежандра.

Задача 1. Доказать формулу Родрига для для полиномов Лежандра

$$Q_n = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Список литературы

[1] Бурбаки Н., Группы Ли и алгебры Ли. Главы I-III., Москва, Мир, 1976

[2] Постников М.М., Группы и алгебры Ли, Москва, Наука, 1982

[3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, Москва, Мир, 1969.

[4] Винберг Э.Б., Онищик А.Л., Основы теории групп Ли, Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики, 1988, т.20, 5-101.

[5] Желобенко Д.П., Компактные группы Ли и их представления, Москва, Наука, 1970.