ВТОРОЙ СЕМЕСТР

Занятие 1. Кольцо многочленов. Операции над многочленами

1.1. a) Известно, что многочлен $f(x)$ дает остаток $x+1$ при делении на x^2+1 и остаток 3 при делении на $x+2$. Найдите остаток при делении $f(x)$ на $(x^2+1)(x+2)$.

b) Известно, что многочлен $f(x)$ дает остаток $ax+b$ при делении на x^2-2 и остаток $cx+d$ при делении на x^2+3. Найдите остаток при делении $f(x)$ на $(x^2-2)(x^2+3)$.

1.2. Разделите с остатком многочлен $f(x) \in k[x]$ на $x-x_0$ и вычислите значение $f(x_0)$:

a) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8 \in \mathbb{Q}[x]$, $x_0 = 1$;

b) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x \in \mathbb{Q}[x]$, $x_0 = -3$;

c) $f(x) = 3x^5 + x^4 - 19x^2 - 13x - 10 \in \mathbb{Q}[x]$, $x_0 = 2$;

d) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 2x + 5 \in \mathbb{Q}[x]$, $x_0 = -2$;

e) $f(x) = \bar{3}x^5 + \bar{2}x^3 - x^2 + x + \bar{5} \in \mathbb{F}_{11}[x]$, $x_0 = \bar{3}$;

f) $f(x) = x^{12} + x^6 \in \mathbb{F}_{13}[x]$, $x_0 = \bar{9}$.

1.3. Определите кратность корня x_0 многочлена $f(x)$:

a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $x_0 = 2$;

b) $f(x) = x^5 + 7x^4 + 18x^3 + 8x^2 - 16x - 16$, $x_0 = -2$;

c) $f(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - 10x - 8$, $x_0 = -1$;

d) $f(x) = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 36x^2 - 27x - 54$, $x_0 = 3$.

1.4. Найдите наибольший общий делитель многочленов:

a) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ и $x^3 + x^2 - x - 1$;

b) $x^6 + \bar{2}x^4 - \bar{4}x^3 - \bar{3}x^2 + \bar{8}x - \bar{5}$ и $x^5 + x^2 - x + \bar{1}$ из $\mathbb{F}_{11}[x]$;

c) $x^5 + \bar{3}x^2 - \bar{2}x + \bar{2}$ и $x^6 + x^5 + x^4 - \bar{3}x^2 + \bar{2}x - \bar{6}$ из $\mathbb{F}_7[x]$;

d) $x^4 + x^3 - 4x + 5$ и $2x^3 - x^2 - 2x + 2$.

1.5. Найдите наибольший общий делитель данных многочленов и его линейное выражение через них (обобщенный алгоритм Евклида):

a) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$ и $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$, b) $3x^3 - 2x^2 + x + 2$ и $x^2 - x + 1$.

1.6. Определите a так, чтобы

a) многочлен $f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$ имел -1 корнем не ниже второй кратности;

b) многочлен $f(x) = x^{100} - ax^{15} + ax^6 - 1$ имел 1 корнем не ниже второй кратности.

1.7. Определите a и b так, чтобы многочлен $f(x)$ делился на $(x-1)^2$:

a) $f(x) = ax^4 + bx^3 + 1$; b) $f(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$.

1.8. Докажите, что трехчленный многочлен не может иметь корней, отличных от нуля, выше второй кратности. Найдите условие, при котором трехчленный многочлен имеет двойной корень, отличный от нуля.

1.9. Докажите, что многочлен $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ не имеет кратных корней.

1.10. Выделив кратные неприводимые множители данного многочлена, разложите его на неприводимые множители:

a) $x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$, b) $x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 20x - 8$,

c) $x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$, d) $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$.

1.11. Найдите все приведенные неприводимые многочлены степени два и три над полями $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$ и $\mathbb{F}_5$.

1.12. Найдите сумму чисел, обратных комплексным корням многочлена:

a) $3x^3 + 2x^2 - 1$, b) $x^4 - x^2 - x - 1$.

1.13. Определите λ так, чтобы

a) один из корней уравнения $x^3 - 7x + \lambda = 0$ равнялся удвоенному другому;

b) сумма двух корней уравнения $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$ равнялась 1.

Занятие 2. Многочлены над полями рациональных, действительных, комплексных чисел

2.1. Разложите на неприводимые множители над полем комплексных чисел многочлены: a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, b) $x^4 + 4$, c) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$, d) $x^4 - 10x^2 + 1$.

2.2. Разложите на неприводимые множители над полем вещественных чисел многочлены: a) $x^6 + 27$, b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$, c) $x^4 - ax^2 + 1$ ($|a| < 2$), d) $x^{2n} + x^n + 1$, e) $x^6 - x^3 + 1$, f) $x^{12} + x^8 + x^4 + 1$.

2.3. Постройте многочлен наименьшей степени с вещественными коэффициентами, имеющий:
a) двойной корень 1, простые корни 2, 3 и $1 + i$;
b) двойной корень i, простой корень $-1 - i$.

2.4. Найдите наибольший общий делитель многочленов:
a) $x^m - 1$ и $x^n - 1$, b) $x^m + 1$ и $x^n + 1$.

2.5. Докажите, что если многочлен $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ принимает неотрицательные значения при всех $x \in \mathbb{R}$, то он представляется в виде суммы квадратов двух многочленов из $\mathbb{R}[x]$.

2.6. Многочлен $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Известно, что $f(\sqrt{2}) = 0$. Докажите, что $f(x)$ делится на $x^2 - 2$.

2.7. Докажите неприводимость над полем рациональных чисел многочленов:
a) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$, b) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$,
c) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) - 1$, d) $x^4 - x^3 + 2x + 1$, e) $x^{105} - 9$,
f) $(x - a_1)(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) - 1$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные целые числа,
g) $(x - a_1)^2(x - a_2)^2 \cdot \ldots \cdot (x - a_n)^2 + 1$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные целые числа.

2.8. Найдите рациональные корни многочленов:
a) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$, b) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$,
c) $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$, d) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$,
e) $24x^4 - 42x^3 - 77x^2 + 56x + 60$, f) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$,
g) $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$, h) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$,
i) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$, j) $x^6 - 6x^5 + 11x^4 - x^3 - 18x^2 + 20x - 8$.

Занятие 3. Линейные пространства: базис, размерность, tкоординаты векторов

3.1. Докажите, что если некоторый вектор $\overline{v}$ линейного пространства V/k может быть единственным образом линейно выражен через некоторую систему векторов $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$, то эта система является базисом линейного пространства V.

3.2. Выясните, какие из следующих множеств матриц порядка n с коэффициентами из поля k образуют линейное пространство относительно сложения матриц и их умножения на элементы поля k. Найдите их базис и размерность:
a) множество всех матриц;
b) множество всех симметрических матриц, то есть таких матриц A, что ${}^tA = A$;
c) множество кососимметрических матриц, то есть таких матриц A, что ${}^tA = -A$;
d) множество всех невырожденных матриц;
e) множество всех вырожденных матриц;
f) множество матриц, перестановочных с данной матрицей A (при нахождении базиса и размерности считать матрицу A диагональной с различными диагональными элементами);
g) множество матриц, перестановочных со всеми матрицами.

3.3. Найдите базис и размерность следующих линейных пространств:
a) многочлены из $\mathbb{R}_n[x]$, имеющие данный корень $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) многочлены из $\mathbb{R}_n[x]$, имеющие данный корень $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;
c) многочлены из $\mathbb{R}_n[x]$, имеющие данные корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

3.4. Векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ и $\overline{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе. Покажите, что $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ — также базис, и найдите координаты вектора $\overline{x}$ в этом базисе.
a) $\overline{e}_1 = (1, 1, 1), \overline{e}_2 = (1, 1, 2), \overline{e}_3 = (1, 2, 3)$, $\overline{x} = (6, 9, 14)$.
b) $\overline{e}_1 = (2, 1, -3), \overline{e}_2 = (3, 2, -5), \overline{e}_3 = (1, -1, 1)$, $\overline{x} = (6, 2, -7)$.
c) $\overline{e}_1 = (1, 2, -1, -2), \overline{e}_2 = (2, 3, 0, -1), \overline{e}_3 = (1, 2, 1, 4), \overline{e}_4 = (1, 3, -1, 0)$ $\overline{x} = (7, 14, -1, 2)$.

3.5. Докажите, что каждая из двух систем векторов является базисом, и найдите связь координат одного и того же вектора в этих двух базисах:

a) $S = \{(1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1)\}$, $S' = \{(3, 1, 4), (5, 2, 1), (1, 1, -6)\}$.

b) $S = \{(1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 8, 2)\}$, $S' = \{(3, 5, 8), (5, 14, 13), (1, 9, 2)\}$.

c) $S = \{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 3, 2, 3)\}$,
$S' = \{(1, 0, 3, 3), (-2, -3, -5, -4), (2, 2, 5, 4), (-2, -3, -4, -4)\}$.

3.6. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:

a) поменять местами два вектора первого базиса,

b) поменять местами два вектора второго базиса,

c) записать векторы обоих базисов в обратном порядке?

3.7. Перечислите все базисы линейных пространств $\mathbb{F}_3^2$, $\mathbb{F}_2^3$. Сколько различных базисов имеет n-мерное линейное пространство над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов?

Занятие 4. Линейные подпространства: сумма и пересечение, прямая сумма

4.1. Выясните, является ли линейным подпространством соответствующего линейного пространства каждое из следующих множеств векторов:

a) векторы плоскости с началом O, концы которых лежат на одной из двух прямых, пересекающихся в O;

b) векторы плоскости с началом O, концы которых лежат на данной прямой;

c) векторы плоскости с началом O, концы которых не лежат на данной прямой;

d) векторы координатной плоскости, концы которых лежат в первой четверти;

e) векторы пространства $\mathbb{R}^n$, координаты которых — целые числа;

f) векторы пространства $\mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют уравнению
$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$;

g) многочлены четной степени с коэффициентами из поля k.

4.2. Найдите базис и размерность следующих линейных подпространств в $\mathbb{R}^n$:

a) подпространство векторов, у которых совпадают первая и последняя координаты;

b) подпространство векторов, у которых все координаты с четными номерами равны 0;

c) подпространство векторов, у которых координаты с нечетными номерами равны между собой.

4.3. Докажите, что всякое линейное пространство размерности n над бесконечным полем имеет бесконечное число линейных подпространств размерности m, где $m < n$.

4.4. Перечислите все линейные подпространства в $\mathbb{F}_5^2$ и $\mathbb{F}_2^3$. Сколько различных линейных подпространств размерности m содержит n-мерное линейное пространство над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов?

4.5. Найдите базис и размерность линейной оболочки следующих систем векторов:

a) $\{(1, 0, 0, -1), (2, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 3)\}$;

b) $\{(1, 1, 1, 1, 0), (1, 1, -1, -1, -1), (2, 2, 0, 0, -1), (1, 1, 5, 5, 2), (1, -1, -1, 0, 0)\}$.

4.6. Найдите базисы суммы и пересечения линейных оболочек следующих систем векторов:

a) $S = \{(1, 2, 1), (1, 1, -1), (1, 3, 3)\}$, $T = \{(2, 3, -1), (1, 2, 2), (1, 1, -3)\}$;

b) $S = \{(1, 2, 1, -2), (2, 3, 1, 0), (1, 2, 2, -3)\}$, $T = \{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, -1), (1, 3, 0, -4)\}$;

c) $S = \{(-1, 6, 4, 7, -2), (-2, 3, 0, 5, -2), (-3, 6, 5, 6, -5)\}$,
$T = \{(1, 1, 2, 1, -1), (0, -2, 0, -1, -5), (2, 0, 2, 1, -3)\}$;

d) $S = \{(1, 1, 0, 0, -1), (0, 1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 1)\}$, $T = \{(1, 0, 1, 0, 1), (0, 2, 1, 1, 0), (1, 2, 1, 2, -1)\}$.

4.7. Пусть линейные подпространства U и V в $\mathbb{R}^n$ заданы следующими системами уравнений $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ и $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ соответственно. Докажите, что $\mathbb{R}^n = U \oplus V$.

4.8. Докажите, что пространство $Mat(n, \mathbb{R})$ является прямой суммой подпространства симметрических и подпространства кососимметрических матриц.

Занятие 5. Линейные операторы. Кольцо эндоморфизмов линейного пространства

5.1. Какие из следующих отображений в соответствующих линейных пространствах являются линейными операторами. Для линейных операторов найти образы и ядра:

a) $x \mapsto x + a$, где a — фиксированный вектор;

b) $f(x) \mapsto f(x+1) - f(x)$, где $f(x) \in \mathbb{R}_n[x]$;

c) $f(x) \mapsto f^{(k)}(x)$, $f(x) \in \mathbb{R}_n[x]$;

d) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2, x_2 + 5, x_3)$;

e) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3)$;

f) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 3x_3, x_2^3, x_1 + x_3)$;

g) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3)$.

5.2. Докажите, что всякий линейный оператор переводит линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую систему векторов. Верно ли аналогичное утверждение для линейно независимой системы векторов?

5.3. Опишите все эндоморфизмы одномерного линейного пространства над произвольным полем k.

5.4. Найдите общее количество эндоморфизмов n-мерного линейного пространства над конечным полем $\mathbb{F}_q$, размерность ядра которых равна m $(0 \le m \le n)$.

5.5. Предварительно проверив, что a_1, a_2, a_3 являются базисными векторами в $\mathbb{R}^3$, найдите матрицу линейного оператора, переводящего векторы a_1, a_2, a_3 в векторы b_1, b_2, b_3, как в базисе a_1, a_2, a_3, так и в базисе, в котором даны координаты всех векторов:

a) $a_1 = (2,3,5), a_2 = (0,1,2), a_3 = (1,0,0)$; $b_1 = (1,1,1), b_2 = (1,1,-1), b_3 = (2,1,2)$;

b) $a_1 = (2,0,3), a_2 = (4,1,5), a_3 = (3,1,2)$; $b_1 = (1,2,-1), b_2 = (4,5,-2), b_3 = (1,-1,1)$.

5.6. Пусть линейный оператор φ в n-мерном линейном пространстве V/k переводит линейно независимые векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в векторы $b_1, b_2, \ldots, b_n$ соответственно. Докажите, что матрица этого оператора в некотором базисе $\overline{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ равна BA^{-1}, где столбцы матриц A и B состоят соответственно из координат заданных векторов в базисе $\overline{e}$.

5.7. Найдите в указанном базисе линейного пространства матрицу линейного оператора:

a) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ в стандартном базисе;

b) поворота трехмерного пространства на угол $2\pi/3$ вокруг прямой, заданной в прямоугольной системе координат уравнениями $x_1 = x_2 = x_3$ в базисе из единичных векторов осей координат;

c) проектирования трехмерного пространства на координатную ось вектора e_2 параллельно координатной плоскости векторов e_1 и e_3 в базисе e_1, e_2, e_3;

d) оператора $X \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot X$ в пространстве $Mat(2,k)$ в базисе из матричных единиц $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

e) оператора $X \mapsto^t X$ в пространстве $Mat(2,k)$ в базисе из матричных единиц;

f) оператора дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ в базисе $1, x, \ldots, x^n$;

g) оператора дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ в базисе

$$1, x-1, \frac{(x-1)^2}{2}, \ldots, \frac{(x-1)^n}{n!}.$$

5.8. Найдите общий вид матрицы линейного оператора ψ в базисе, первые k векторов которого составляют: a) базис ядра ψ, b) базис образа оператора ψ.

5.9. Линейный эндоморфизм φ некоторого четырехмерного линейного пространства в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу φ в базисе a) e_1, e_3, e_2, e_4, b) $e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3, e_1+e_2+e_3+e_4$.

5.10. Пусть линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}_2[x]$ имеет в базисе $1, x, x^2$ матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите его матрицу в базисе $3x^2+2x+1, x^2+3x+2, 2x^2+x+3$.

5.11. a) Пусть преобразование φ в базисе $a_1 = (1, 2), a_2 = (2, 3)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, а преобразование ψ в базисе $b_1 = (3, 1), b_2 = (4, 2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу преобразования $\varphi + \psi$ в базисе b_1, b_2.

b) Пусть преобразование φ в базисе $a_1 = (-3, 7), a_2 = (1, -2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а преобразование ψ в базисе $b_1 = (6, -7), b_2 = (-5, 6)$ — матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу преобразования $\varphi \cdot \psi$ в базисе, в котором даны координаты всех векторов.

Занятие 6. Линейные операторы. Собственные значения и собственные векторы

6.1. Найдите собственные векторы и собственные значения:

a) оператора дифференцирования в пространствах $\mathbb{R}_n[x]$ и $\mathbb{F}_p[x]$ (p — простое число);

b) оператора $X \mapsto^t X$ в пространстве $Mat(n, \mathbb{R})$;

c) оператора $x\frac{d}{dx}$ в пространстве $\mathbb{R}_n[x]$;

d) оператора $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ в пространстве $\mathbb{R}_n[x]$.

6.2. Докажите, что все ненулевые векторы линейного пространства являются собственными для линейного оператора φ тогда и только тогда, когда φ — оператор гомотетии $x \mapsto \alpha x$, где α — некоторый фиксированный скаляр.

6.3. (*Теорема о вычислении характеристического многочлена*) Докажите, что характеристический многочлен $f(\lambda) = |A - \lambda E|$ имеет вид

$$f(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}c_1\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^k c_{n-k}\lambda^k + \ldots + c_n,$$

где c_k — сумма всех диагональных миноров порядка k матрицы A. Выведите отсюда, что сумма и произведение характеристических чисел матрицы A равны ее следу и определителю соответственно.

6.4. Докажите, что всякий многочлен степени n со старшим коэффициентом $(-1)^n$ является характеристическим многочленом некоторой матрицы порядка n.

6.5. Пусть L — линейное пространство над полем k, и $\dim L = n$. Докажите, что

a) если $k = \mathbb{C}$, то любой эндоморфизм $\varphi \in \mathrm{End}(L)$ имеет ненулевой собственный вектор;

b) если $k = \mathbb{R}$ и n — нечетное число, то любой эндоморфизм $\varphi \in \mathrm{End}(L)$ имеет ненулевой собственный вектор, если же n — четное число, то существует эндоморфизм $\psi \in \mathrm{End}(L)$, не имеющий ненулевых собственных векторов;

c) если $k = \mathbb{Q}$ и $n > 1$, то существует эндоморфизм $\varphi \in \mathrm{End}(L)$, не имеющий ненулевых собственных векторов.

6.6. Докажите, что матрица A подобна диагональной матрице над соответствующим полем, если

a) $A \in Mat(n, \mathbb{R})$, $A^2 = E$;

b) $A \in Mat(n, \mathbb{C})$, $A^t = E$, $t \in \mathbb{N}$;

c) $A \in Mat(n, k)$, где k — произвольное поле, и $A^2 = A$.

6.7. Найдите собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе указанными матрицами. Дополнительно выясните, приводится ли матрица оператора к диагональному виду путем перехода к новому базису.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\text{e)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{f)} \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}, \quad \text{g)} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{h)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{j)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{k)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{l)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.8. Обобщением понятия собственного вектора линейного оператора является понятие *инвариантного подпространства* линейного оператора: пусть $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, линейное подпространство $L < V$ называется инвариантным подпространством оператора φ, если $\varphi(L) \subset L$. Докажите, что

a) ядро и образ эндоморфизма линейного пространства являются его инвариантными подпространствами;

b) одномерное подпространство является инвариантным подпространством линейного оператора тогда и только тогда, когда оно порождено собственным вектором этого линейного оператора;

c) линейное подпространство $L =< \bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_m >$ является инвариантным относительно линейного оператора φ тогда и только тогда, когда $\varphi(\bar{e}_i) \in L, i = \overline{1, m}$;

d) для линейного оператора $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ и любого вектора $\overline{x} \in V$ линейное подпространство, порожденное множеством $\left\{\varphi^k(\overline{x})\right\}_{k=0}^{\dim V}$, является инвариантным пространством оператора φ.

6.9. Найдите все инвариантные подпространства линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

в некотором базисе трехмерного пространства.

Занятие 7. Жорданова нормальная форма матрицы

7.1. Составьте таблицу элементарных делителей и найдите нормальную жорданову форму матрицы A, если даны инвариантные множители ее характеристической матрицы:

a) $e_1(\lambda) = e_2(\lambda) = 1,\ e_3(\lambda) = e_4(\lambda) = \lambda - 1,\ e_5(\lambda) = e_6(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$,

b) $e_1(\lambda) = e_2(\lambda) = 1,\ e_3(\lambda) = \lambda - 2,\ e_4(\lambda) = \lambda^2 - 4$,

c) $e_1(\lambda)=e_2(\lambda)=e_3(\lambda)=1,\ e_4(\lambda)=\lambda+1,\ e_5(\lambda)=(\lambda+1)^2,\ e_6(\lambda)=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$,
d) $e_1(\lambda)=e_2(\lambda)=e_3(\lambda)=e_4(\lambda)=1,\ e_5(\lambda)=\lambda^2+3\lambda,\ e_6(\lambda)=\lambda^4+3\lambda^3$.

7.2. По таблице элементарных делителей вычислите инвариантные множители характеристической матрицы для матрицы A, а также найдите жорданову нормальную форму матрицы A.

$$\text{a)}\ \begin{array}{llll}(\lambda-1)^2 & \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1\\ \lambda+5 & & & \end{array};\quad \text{b)}\ \begin{array}{lll}(\lambda+1)^2 & \lambda+1 & \lambda+1\\ (\lambda+2)^3 & \lambda+2 & \\ \lambda^2 & \lambda & \end{array};\quad \text{c)}\ \begin{array}{ll}\lambda-3 & \lambda-3\\ (\lambda-1)^3 & (\lambda-1)^3\\ (\lambda+2)^2 & \lambda+2\end{array}.$$

7.3. Составьте все возможные типы таблиц элементарных делителей и соответствующие жордановы нормальные формы для матриц из $Mat(3,\mathbb{C})$ и $Mat(4,\mathbb{C})$.

7.4. Найдите жорданову форму матрицы линейного оператора и матрицу перехода к жорданову базису, если в исходном базисе оператор задан матрицей:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix}0&2\\-3&5\end{pmatrix},\quad \text{b)}\ \begin{pmatrix}3&1\\-1&5\end{pmatrix},\quad \text{c)}\ \begin{pmatrix}3&2&-3\\4&10&-12\\3&6&-7\end{pmatrix},\quad \text{d)}\ \begin{pmatrix}0&3&3\\-1&8&6\\2&-14&-10\end{pmatrix},$$

$$\text{e)}\begin{pmatrix}1&-3&4\\4&-7&8\\6&-7&7\end{pmatrix},\ \text{f)}\ \begin{pmatrix}-4&2&10\\-4&3&7\\-3&1&7\end{pmatrix},\ \text{g)}\begin{pmatrix}4&5&-2\\-2&-2&1\\-1&-1&1\end{pmatrix},\ \text{h)}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{pmatrix},$$

$$\text{i)}\ \begin{pmatrix}4&-5&2\\5&-7&3\\6&-9&4\end{pmatrix},\ \text{j)}\ \begin{pmatrix}6&6&-15\\1&5&-5\\1&2&-2\end{pmatrix},\ \text{k)}\ \begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&2&-1&1\\-1&1&1&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix},\ \text{l)}\ \begin{pmatrix}6&-9&5&4\\7&-13&8&7\\8&-17&11&8\\1&-2&1&3\end{pmatrix}.$$

7.5. Известно, что матрица $A\in Mat(n,k)$ имеет нормальную жорданову форму J. Найдите нормальную жорданову форму матриц:
a) $A+\alpha E$, где α — произвольный элемент поля k;
b) ${}^tA$;
c) A^2, предварительно выяснив, какую жорданову форму имеет квадрат жордановой клетки порядка m, отвечающей числу λ_0.

Занятие 8. Квадратичные формы

8.1 Выясните, эквивалентны ли следующие комплексные квадратичные формы:
a) $x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_4+3x_2x_4+2x_4^2$ и $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4$,
b) $x_1^2+x_2^2+4x_3^2-x_4^2+2x_1x_2+4x_1x_3-2ix_1x_4+4x_2x_3-2ix_2x_4-4ix_3x_4$ и $x_1^2-(2+2i)x_1x_4+2ix_4^2$.

8.2. Приведите к каноническому виду над полем рациональных чисел следующие квадратичные формы, указав при этом линейную замену переменных, приводящую к этому виду:
a) $x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;
b) $x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$;
c) $x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$;
d) $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$;
e) $x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$.

8.3. Приведите рациональные квадратичные формы к каноническому виду

$$\text{a)}\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i<k}x_ix_k;\qquad \text{b)}\ \sum_{i<k}x_ix_k.$$

8.4. Найдите нормальный канонический вид следующих вещественных квадратичных форм, их ранги, сигнатуру, а также невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду:

a) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;
b) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;
c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;
d) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$;
e) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$;
f) $-12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$.

8.5. Найдите все значения параметра λ, при которых положительно определены следующие квадратичные формы:

a) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;
b) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$;
c) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
d) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

8.6. Найдите все значения параметра λ, при которых отрицательно определены следующие квадратичные формы:

a) $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$;
b) $\lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

8.7. Докажите, что если все характеристические числа вещественной симметрической матрицы A лежат на отрезке $[a, b]$, то квадратичная форма с матрицей $A - \lambda E$ отрицательно определена при $\lambda > b$ и положительно определена при $\lambda < a$. Докажите также обратную теорему.

Занятие 9. Примерный вариант итоговой контрольной работы за второй семестр

9.1. Разложите многочлен

$$f(x) = 4x^5 - 7x^3 + 13x^2 - 9x + 2$$

на неприводимые множители a) над полем действительных чисел, b) над полем комплексных чисел.

9.2. Найдите жорданову форму матрицы линейного оператора и матрицу перехода к жорданову базису, если в исходном базисе оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & 13 & 3 \\ -4 & -7 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

9.3. Найдите нормальный канонический вид вещественной квадратичной формы, ее ранг, сигнатуру, а также невырожденную линейную замену переменных, приводящую к этому виду

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3.$$