Задачи по аналитической геометрии

М. А. Микенберг

Настоящий сборник задач соответствует курсу аналитической геометрии для студентов механико-математического факультета университета. Большинство задач пособия стандартны. Для решения многих из них нужно просто поставить параметры в формулы. Сборник содержит 18 параграфов. В начале каждого параграфа дается очень сжатый обзор теории. После краткого обзора теории следуют задачи по теме данного занятия. Думаю, что настоящее пособие поможет студентам освоить аналитическую геометрию. При составлении пособия были использованы следующие прекрасные сборники задач: О.Н.Цубербиллер "Задачи и упражнения по аналитической геометрии"; Д.В.Клетеник "Сборник задач по аналитической геометрии"; "Сборник задач по геометрии под редакцией В.Т.Базылева"; С.В.Бахвалов, П.С.Моденов, А.С.Пархоменко "Сборник задач по аналитической геометрии".

§1 Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов. Базис. Координаты вектора.

Пусть даны векторы: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ и вещественные числа: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$; выражение $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$ называют линейной комбинацией данных векторов.

Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называется линейно независимой, если для любого набора вещественных чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, где хотя бы одно $\lambda_i \neq 0$, выполняется неравенство:

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n \neq \vec{0}.$$

Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называется линейно зависимой, если существует набор вещественных чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, где хотя бы одно $\lambda_i \neq 0$, такой, что выполняется равенство:

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Базисом (на прямой, на плоскости, в пространстве) называется упорядоченная система векторов, которая линейно независима и при этом каждый вектор (прямой, плоскости, пространства) является линейной комбинацией векторов данной системы. Базисом на прямой является всякий ненулевой вектор. Базисом на плоскости является любая система, состоящая из двух неколлинеарных векторов. Базисом в пространстве является любая система, состоящая из трех некомпланарных векторов.
Базис называется ортонормированным, если векторы базиса попарно ортогональны и имеют единичную длину.

Пусть в пространстве даны два базиса:$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ (старый базис) и $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$ (новый базис). Можно разложить векторы нового базиса по векторам старого базиса:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1{}' &= A_{11}\vec{e}_1 + A_{21}\vec{e}_2 + A_{31}\vec{e}_3, \\ \vec{e}_2{}' &= A_{12}\vec{e}_1 + A_{22}\vec{e}_2 + A_{32}\vec{e}_3, \\ \vec{e}_3{}' &= A_{13}\vec{e}_1 + A_{23}\vec{e}_2 + A_{33}\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Из коэффициентов разложения векторов нового базиса по векторам старого базиса можно составить следующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу называют матрицей перехода от базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ к базису $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$. Для базисов на прямой или на плоскости матрица перехода определяется аналогично.

Если вектор $\vec{p}$ разложен по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ (в пространстве): $\vec{p} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, то коэффициенты разложения x, y, z называют координатами вектора $\vec{p}$. Этот факт записывают следующим образом: $\vec{p}(x, y, z)$. Напомним следующие свойства координат: координаты суммы векторов равны суммам соответсвующих координат; координаты произведения вектора на число равны произведениям координат на это число.
Если известны координаты вектора $\vec{x}$ (в пространстве) относительно базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$: (x, y, z) (старые координаты) и координаты этого же вектора относительно базиса $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$: (x', y', z') (новые координаты), то связь между новыми и старыми координатами вектора $\vec{x}$ задается следующими формулами:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = A_{11}x' + A_{12}y' + A_{13}z', \\ y = A_{21}x' + A_{22}y' + A_{23}z', \\ z = A_{31}x' + A_{32}y' + A_{33}z'; \end{array} \right.$$

где A_{ij} - коэффициенты матрицы перехода от базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ к базису $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$.

1.1 Доказать, что если M - точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ и для любой точки O справедливо равенство:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

1.2 Пусть A, B, C, D - произвольные точки пространства. M и N - середины отрезков соответственно AD и BC. Доказать, что $2\overrightarrow{MN} =$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

1.3 Дана трапеция $ABCD$ ($\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AB}$). Точки M и N - середины оснований соответственно AB и DC, P - точка пересечения диагоналей трапеции.

a) Приняв векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ за базисные, найти координаты векторов $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PB}$.

b) Приняв векторы $\overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{PB}$ за базисные, найти разложения векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

1.4 M - точка пересечения медиан треугольника ABC. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ в базисе $\{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\}$.

1.5 M - точка пересечения медиан треугольника ABC.

a) Разложить вектор $\overrightarrow{MA}$ по векторам $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$.

b) Разложить вектор $\overrightarrow{AB}$ по векторам $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$.

c) Разложить вектор $\overrightarrow{OA}$ по векторам $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OM}$, где O - произвольная точка пространства.

1.6 На плоскости даны три вектора своими координатами относительно некоторого базиса: $\vec{a}(4;-2)$, $\vec{b}(3;5)$, $\vec{c}(-2;12)$. Представить вектор $\vec{c}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1.7 $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - неколлинеарные векторы. Доказать, что система векторов $\vec{m} = 3\vec{a} - \vec{b}, \vec{n} = 2\vec{a} + \vec{b}, \vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$ - линейно зависимая, а векторы $\vec{n}$ и $\vec{p}$ не коллинеарны. Разложить вектор $\vec{m}$ по векторам $\vec{n}$ и $\vec{p}$.

1.8 В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла A. Разложить вектор $\overrightarrow{AD}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

1.9 Относительно базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ вектор имеет координаты $(2;1)$. Найти координаты этого же вектора относительно базиса $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\}$, если

$$a)\left\{\begin{array}{l} \vec{e}_1{}' = 4\vec{e}_1, \\ \vec{e}_2{}' = -\frac{2}{3}\vec{e}_2; \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{l} \vec{e}_1{}' = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \\ \vec{e}_2{}' = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2. \end{array}\right.$$

1.10 Относительно базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ заданы векторы: $\vec{a}_1(0;-5;0)$, $\vec{a}_2(-8;0;4)$, $\vec{a}_3(0;-5;-1)$, $\vec{a}_4(0;0;9)$, $\vec{a}_5(3;0;0)$, $\vec{a}_6(0;-7;2)$, $\vec{a}_7(1;-1;7)$, $\vec{a}_8(0;0;0)$. Указать какие векторы a) коллинеарны $\vec{e}_2$; b) компланарные с векторами $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.

1.11 Пусть M, N, P, Q - середины сторон AB, CD, BC, DE пятиугольника $ABCDE$, а K и L середины сторон MN и PQ. Доказать, что прямые AE и KL параллельны и $4|KL| = |AE|$.

1.12 В базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ даны векторы $\vec{p}(-3;6;-13), \vec{a}(1;0;-2)$,

$\vec{b}(1;-1;3), \vec{c}(-2;3;0)$. Представить вектор $\vec{p}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

1.13 Пусть дана матрица перехода от старого базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ к новому базису $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Известны старые координаты вектора $\vec{x}(1;2)$. Найти новые координаты вектора $\vec{x}$.

1.14 Пусть дана матрица перехода от старого базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ к новому базису $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Известны новые координаты вектора $\vec{x}(1;2;3)$. Найти старые координаты вектора $\vec{x}$.

1.15 Даны два базиса: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\}$. Известны координаты векторов этих базисов относительно некоторого третьего базиса: $\vec{e}_1(1;2)$, $\vec{e}_2(3;4)$, $\vec{e}_1{}'(1;-1)$, $\vec{e}_2{}'(1;2)$. Найти матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ к базису $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\}$. Известны координаты вектора $\vec{p}$ относительно базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$: $\vec{p}(-2;5)$. Найти координаты вектора $\vec{p}$ относительно базиса $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\}$.

1.16 Даны два базиса: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$. Известны координаты векторов этих базисов относительно некоторого третьего базиса: $\vec{e}_1(1;2;3), \vec{e}_2(1;0;1), \vec{e}_3(0;2;1), \vec{e}_1{}'(0;1;2), \vec{e}_2{}'(1;2;3), \vec{e}_3{}'(0;1;1)$. Найти матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ к базису $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$. Известны координаты вектора $\vec{p}$ относительно базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$: $\vec{p}(-1;2;1)$. Найти координаты вектора $\vec{p}$ относительно базиса $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$.

1.17 (Теорема о центре масс.) Пусть даны n $(n > 1)$ чисел (масс): $m_1, m_2, ..., m_n$, таких, что $\sum_{i=1}^{n} m_i \neq 0$. Доказать, что для любых точек $A_1, A_2, ..., A_n$ существует единственная точка M (центр масс), такая, что

$$m_1\overrightarrow{MA}_1 + m_2\overrightarrow{MA}_2 + ... + m_n\overrightarrow{MA}_n = \vec{0},$$

и для любой точки O справедливо равенство:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i}(m_1\overrightarrow{OA}_1 + m_2\overrightarrow{OA}_2 + ... + m_n\overrightarrow{OA}_n).$$

§2 Скалярное произведение. Площадь параллелограмма.

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, обозначаемое символом $(\vec{a},\vec{b})$ равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними. Таким образом, $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$. Скалярное произведение - функция линейная по каждому аргументу. Это означает, что выполняются равенства:

$$(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b},\vec{c}) = \lambda(\vec{a},\vec{c})+\mu(\vec{b},\vec{c}),$$
$$(\vec{a},\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}) = \lambda(\vec{a},\vec{b})+\mu(\vec{a},\vec{c});$$

где λ и μ - вещественные числа. Длина вектора равна квадратному корню из его скалярного квадрата: $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$.
Если относительно ортонормированного базиса известны координаты двух векторов: $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$, тогда их скалярное произведение вычисляется по формуле:

$$(\vec{a},\vec{b}) = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

В частности, длина вектора $\vec{a}(x;y;z)$ выражается через его координаты относительно ортонормированного базиса по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Если относительно ортонормированного базиса плоскости известны координаты двух векторов: $\vec{p}(x_1;y_1)$ и $\vec{q}(x_2;y_2)$, тогда площадь параллелограмма, натянутого на эти векторы, равна абсолютной величине определителя:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

2.1 Вычислить скалярное произведение $(\vec{a},\vec{b})$, если $\vec{a} = 3\vec{p}-2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p}+4\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ - единичные взаимно перпендикулярные векторы.
2.2 Вычислить выражение: $3(\vec{m},\vec{m})-2(\vec{m},\vec{n})+4(\vec{n},\vec{n})$, если $|\vec{m}| = 1/3$, $|\vec{n}| = 6$ и угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен $\pi/3$.
2.3 Вычислить скалярное произведение $(\vec{p},\vec{q})$, если $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ - ортонормированный

базис и имеют место разложения:

$\vec{p} = 3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ и $\vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b} - 5\vec{c}$.

2.4 Вычислить сумму $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{c})$, если $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - три единичных вектора, удовлетворяющих условию: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

2.5 Проверить справедливость тождества:

$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) = 2((\vec{a}, \vec{a}) + (\vec{b}, \vec{b}))$

и дать его геометрическое толкование.

2.6 Доказать, что скалярное произведение двух векторов не изменится, если к одному из них прибавить вектор, перпендикулярный другому сомножителю.

2.7 Найти длину вектора $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$, если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные ортогональные векторы.

2.8 Вычислить угол между векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ - единичные ортогональные векторы.

2.9 В прямоугольном равнобедренном треугольнике вычислить угол между двумя медианами, проведенными из вершин острых углов.

2.10 Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $2\pi/3$, определить при каком значении α векторы $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 17\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ будут перпендикулярными.

2.11 Зная векторы, образующие треугольник:

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - 6\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + 7\vec{b}$, $\overrightarrow{CA} = -3\vec{a} - \vec{b}$,

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - единичные ортогональные векторы. Найти углы этого треугольника.

2.12 Зная векторы, образующие треугольник:

$\overrightarrow{AB} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$, $\overrightarrow{CA} = -7\vec{a} + 2\vec{b}$,

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - единичные ортогональные векторы. Вычислить длину медианы, проведенной из вершины A, и длину высоты, опущенной из этой же вершины.

2.13 Доказать, что вектор $\vec{p} = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$ перпендикулярен вектору $\vec{a}$.

В задачах 2.14-2.18 все векторы заданы своими координатами относительно ортонормированного базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

2.14 Вычислить косинус угла, между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известны координаты этих векторов $\vec{a}(2; -4; 4)$, $\vec{b}(-3; 2; 6)$.

2.15 Вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}(6; -8; -15/2)$ образует острый угол с вектором $\vec{k}$. Зная, что $|\vec{x}| = 50$, найти его координаты.

2.16 Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a}(2; 3; -1)$ и $\vec{b}(1; -2; 3)$, и удовлетворяет условию $(\vec{x}, 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$.

2.17 Вычислить проекцию вектора $\vec{a}(5;2;5)$ на ось вектора $\vec{b}(2;-1;2)$.
2.18 Даны три вектора: $\vec{a}(1;-3;4)$, $\vec{b}(3;-4;2)$, $\vec{c}(-1;1;4)$. Вычислить проекцию вектора $\vec{a}$ на ось вектора $\vec{b}+\vec{c}$.
2.19 Доказать, что вектор

$$\vec{p}=\vec{b}-\frac{(\vec{a},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{a})}\vec{a}$$

перпендикулярен к вектору $\vec{a}$.
2.20 В кубе найти величину угла 1) между его диагональю и скрещивающейся с ней диагональю грани; 2) между скрещивающимися диагоналями двух соседних граней; 3) между диагональю куба и пересекающейся с ней диагональю грани.
Используя формулу площади параллелограмма, решить задачи 2.21 - 2.22.
2.21 Относительно ортонормированного базиса плоскости даны два вектора: $\vec{p}(2;-3)$ и $\vec{q}(4;-13)$. Найти площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$.
2.22 Дан треугольник ABC. Относительно ортонормированного базиса плоскости, в которой лежит треугольник, известны координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}(12;3)$, $\overrightarrow{AC}(-5;7)$. Найти площадь треугольника ABC.

§3 Аффинная система координат. Деление отрезка в данном отношении. Формулы преобразования координат. Полярная система координат.

Аффинным репером или аффинной системой координат (в пространстве) называется упорядоченная четверка $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, состоящая из точки O и базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ пространства. Аффинная система координат называется прямоугольной декартовой, если базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ортонормирован.
Говорят, что точка C делит отрезок AB в отношении λ, если выполняется равенство: $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. Если даны координаты точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты точки $C(x; y; z)$, делящей отрезок AB в отношении λ, находятся по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Если даны две аффинные системы координат: $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (старая система координат) и $(O'; \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ (новая система координат), то формулы преобразования координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = A_{11}x' + A_{12}y' + A_{13}z' + x_0, \\ y = A_{21}x' + A_{22}y' + A_{23}z' + y_0, \\ z = A_{31}x' + A_{32}y' + A_{33}z' + z_0; \end{cases}$$

где $(x; y; z)$ - координаты точки относительно старой системы координат, а $(x'; y'; z')$ - координаты этой же точки относительно новой системы координат; $(x_0; y_0; z_0)$ - координаты точки O' относительно старой системы координат, A_{ij} - коэффициенты матрицы перехода от базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ к базису $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$ (см. занятие 1).

Выше приведены формулы для пространства. Для плоскости имеют место аналогичные формулы. Их приводить не будем. Однако, отметим один частный случай формул преобразования координат на плоскости. Формулы преобразования прямоугольных декартовых координат на плоскости при повороте осей на угол φ и переносе начала координат в точку $(x_0; y_0)$ определяются равенствами:

$$\begin{cases} x = \cos(\varphi)x' - \sin(\varphi)y' + x_0, \\ y = \sin(\varphi)x' + \cos(\varphi)y' + y_0. \end{cases}$$

Полярной системой координат на плоскости называется пара (O, l), состоящая из точки O и луча l с началом в точке O. Точку O называют полюсом, а луч l полярной осью. Каждой точке плоскости M, отличной от точки O, можно поставить в соответствие пару чисел (полярные координаты) $(r; \varphi)$, где r - длина отрезка OM, а φ угол между лучом l и вектором $\overrightarrow{OM}$.

Если известны прямоугольные декартовы координаты двух точек: $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то длина отрезка AB вычисляется по формуле:

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

3.1 Найти координаты середины отрезка AB, если известны координаты его концов: $A(3; 7; 9)$ и $B(-1; 3; -5)$.
3.2 Даны вершины треугольника: $A(1; -3)$, $B(3; -5)$, $(-5; 7)$. Определить середины его сторон.
3.3 Даны две точки: $A(3; -1)$ и $B(2; 1)$ наити:
a) координаты точки M, симметричной точке A относительно точки B;
b) координаты точки N, симметричной точке B относительно точки A.
3.4 Точки $M(2; -1)$, $N(-1; 4)$, $P(-2; 2)$ являются серединами сторон треугольника. Найти координаты его вершин.
3.5 Отрезок с концами $A(1; -3)$ и $B(4; 3)$ разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.
3.6 Отрезок с концами $A(35; -15; 25)$ и $B(75; 40; 60)$ разделен на пять равных частей. Найти координаты точек деления.
3.7 Точка C делит отрезок с концами $A(8; -4; 4)$ и $B(-6; 12; -16)$ в отношении $\lambda = -5/2$. Найти координаты точки C.
3.8 Написать формулы преобразования координат, если начало координат (без изменения направления осей) перенесено в точку $(3; 4)$.
3.9 Написать формулы преобразования координат, если оси координат (без изменения начала координат) повернуты на угол $a)\ 60°$, $b)\ -45°$.
3.10 Определить угол поворота осей координат, если формулы преобразования

координат заданы выражениями:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y', \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'. \end{cases}$$

3.11 Найти старые координаты нового начала координат и угол поворота осей координат, если формулы преобразования координат заданы выражениями:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 5, \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' - 3. \end{cases}$$

3.12 Даны две точки: $A(9; -3)$ и $B(-6; 5)$. Начало новой системы координат перенесено в точку A, а оси координат повернуты так, что положительное направление новой оси абсцисс совпадает с направление вектора $\overrightarrow{AB}$. Написать формулы преобразования координат.

3.13 Полярная ось полярной системы координат параллельна оси абсцисс прямоугольной декартовой системы координат и направлена одинаково с ней. Известны прямоугольные декартовы координаты полюса $(1; 2)$ и полярные координаты точек $A(7; \pi/2)$ и $B(2; -\pi/6)$. Найти прямоугольные декартовы координаты точек A и B. Найти длину отрезка AB.

3.14 Полярная ось полярной системы координат параллельна оси абсцисс прямоугольной декартовой системы координат и направлена одинаково с ней. Даны прямоугольные декартовы координаты полюса $(3; 2)$ и точек $A(5; 2)$ и $B(3; 1)$. Найти полярные координаты точек A и B.

3.15 Даны две аффинные системы координат: $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (старая система координат) и $(O'; \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ (новая система координат). Матрица перехода от базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ к базису $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

известны координаты точки O' относительно старой аффинной системы координат: $(7; -2; 1)$. Найти:

a) формулы преобразования координат,

b) новые координаты точки A, если известны старые координаты: $(3; 0; 1)$.

3.16 Даны вершины треугольника: $A(3; -5)$, $B(1; -3)$ и $C(2; -2)$. Найти длину биссектрисы угла B.

3.17 Даны вершины треугольника: $A(3;0;-5)$, $B(0;4;-1)$, $C(-7;2;0)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

Используя формулу площади параллелограмма из зянятия 2, решить задачи 3.18 - 3.21.

3.18 Дан параллелограмм $ABCD$. Известны координаты трех его вершин: $A(2;5)$, $B(-2;3)$, $D(7;-6)$. Найти площадь параллелограмма $ABCD$.

3.19 Дан треугольник ABC. Найти его площадь, если

1) $A(2;1)$, $B(3;4)$, $C(1;6)$;

2) $A(-2;4)$, $B(0;-3)$, $C(1;7)$.

3.20 Найти расстояние

1) от точки $(2;0)$ до прямой AB, где $A(1;1)$ и $B(5;4)$;

2) от точки $(0;0)$ до прямой AB, где $A(1;5)$ и $B(2;4)$.

3.21 Площадь треугольника равна 10. Две вершины находятся в точках $(5;1)$ и $(-2;2)$. Найти координаты третьей вершины, если

1) она находится на оси OX;

2) она находится на оси OY.

§4 Прямая на плоскости.

Общее уравнение прямой имеет вид: $ax+by+c=0$, где a, b, c - вещественные константы; направляющий вектор прямой имеет координаты $(-b; a)$.

Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$, с направляющим вектором $(m; n)$ имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases}$$

где t - параметр, пробегающий множество вещественных чисел. Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$, с направляющим вектором $(m; n)$ можшо записать также в виде:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Если прямая проходит через две различные точки с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, то ее уравнение можно записать в виде:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Прямая $ax+by+c=0$ разбивает множество точек плоскости отличных от точек прямой на два множества (две полуплоскости). Для точек одной полуплоскости имеет место неравенство $ax + by + c > 0$, а для точек другой полуплоскости неравенство $ax + by + c < 0$.

Совокупность прямых, проходящих через некоторую фиксированную точку P называется пучком прямых с центром в точке P. Если прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ пересекаются в точке P, то множество прямых, проходящих через точку P, описывается соотношением:

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2) = 0,$$

где α и β - вещественные числа одновременно не равные нулю. Последнее выражение называют уравнением пучка.

Две прямые $l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$
a) совпадают, тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

$$\begin{cases} a_2 = \lambda a_1, \\ b_2 = \lambda b_1, \\ c_2 = \lambda c_1, \end{cases}$$

для некоторого вещественного λ;
b) параллельны, тогда и только тогда, когда выполняются сотношения:

$$\begin{cases} a_2 = \lambda a_1, \\ b_2 = \lambda b_1, \\ c_2 \neq \lambda c_1, \end{cases}$$

для некоторого вещественного λ;
c) пересекаются, тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

4.1 Определить, какие из точек: $A(3;1)$, $B(2;3)$, $C(-3;-3)$, $D(-2;1)$ лежат на прямой $2x - 3y - 3 = 0$.
4.2 Абсцисса точки, лежащей на прямой $2x-y+6 = 0$, равна 2. Определить ординату этой точки.
4.3 Даны параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = 2 + 7t, \\ y = -5 - 3t. \end{cases}$$

Написать общее уравнение этой прямой.
4.4 Дано общее уравнение прямой: $3x-7y+11 = 0$. Записать параметрические уравнения этой прямой.
4.5 Определить, как расположены следующие прямые:

$$a) \quad \begin{array}{l} x - y - 11 = 0, \\ 2x - y + 9 = 0; \end{array} \qquad\qquad b) \quad \begin{array}{l} 5x - 3y - 15 = 0, \\ 10x - 6y - 31 = 0. \end{array}$$

4.6 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(2; 1)$, параллельно прямой $2x + 3y + 4 = 0$.
4.7 Даны вершины треугольника: $A(-1; 2), B(3; -1), C(0; 4)$. Написать уравнения прямых, проходящих через каждую вершину треугольника параллельно противолежащей стороне.
4.8 Даны вершины треугольника: $A(4; 6), B(-4; 0), C(-1; -4)$. Написать уравнение медианы, проходящей через вершину C.
4.9 Проверить, лежат ли на одной прямой три точки:

$$a)\ A(1; 3),\ B(5; 7),\ C(10; 12);$$
$$b)\ P(-3; -8),\ Q(1; -2),\ R(10; 12).$$

4.10 Проверить, проходят ли через одну точку следующие прямые:

$$a)\quad \begin{aligned} 3x - y - 1 &= 0, \\ 2x - y + 3 &= 0, \\ x - y + 7 &= 0; \end{aligned} \qquad\qquad b)\quad \begin{aligned} 5x - 3y - 15 &= 0, \\ x + 5y - 3 &= 0, \\ 3x + y + 5 &= 0. \end{aligned}$$

4.11 Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x + 5y - 8 = 0,\ \ x - 3y + 4 = 0$
a) и начало координат,
b) параллельно оси абсцисс,
c) параллельно оси ординат,
d) и точку $(4; 3)$.
4.12 Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - 5y - 1 = 0$, $x + 4y - 7 = 0$ и делящей отрезок между точками $A(4; -3)$ и $B(-1; 2)$ в отношении $2/3$.
4.13 Исследовать, как расположены относительно осей координат следующие прямые: $5x - 2y = 0, 3x - 11 = 0, 4y + 13 = 0, 3x - 5y + 7 = 0, x = 0, y = 0$.
4.14 Даны уравнения сторон четырехугольника: $x - y = 0, x + 3y = 0, x - y - 4 = 0, 3x + y - 12 = 0$, написать уравнения его диагоналей.
4.15 Даны середины сторон треугольника: $L(0; 3), M(-4; 0), N(5; 11)$, написать уравнения его сторон.
4.16 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(0; 1)$, такой, что ее отрезок, заключенный между двумя прямыми: $x - 3y + 10 = 0$ и $2x + y - 8 = 0$, делился бы в точке A пополам.
4.17 Написать уравнение прямой, параллельной двум данным прямым: $3x - 15y - 1 = 0$, $x - 5y - 2 = 0$ и проходящей посредине между ними.
4.18 Определить, лежат ли точки $A(-3; 4)$ и $B(8; 0)$ по одну сторону

относительно прямой $8x - 3y + 13 = 0$.

4.19 Определить, лежат ли точки $A(2;3)$ и $B(5;-1)$ в одном, в смежных или вертикальных углах, образованных прямыми:

$$\begin{array}{llll} a) & x - 3y - 5 = 0 & \text{и} & 2x + 9y - 2 = 0; \\ b) & 12x + y - 1 = 0 & \text{и} & 13x + 2y - 5 = 0; \\ c) & 2x + 7y - 5 = 0 & \text{и} & x + 3y + 7 = 0. \end{array}$$

4.20 Написать уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин: $A(-4;2)$ и уравнения двух медиан: $3x - 2y + 2 = 0$ и $3x + 5y - 12 = 0$.

4.21 Найти центр пучка прямых, заданного соотношением:

$$\alpha(2x + 3y - 1) + \beta(x - 2y - 4) = 0.$$

4.22 Найти уравнение прямой, принадлежащей пучку прямых:

$$\alpha(x + 2y - 5) + \beta(3x - 2y + 1) = 0 \quad \text{и}$$

a) проходящей через точку $A(3;-1)$,
b) параллельной оси абсцисс,
c) параллельной оси ординат,
d) параллельной прямой $4x + 3y + 5 = 0$.

4.23 Дан пучок прямых:

$$\alpha(3x - 2y - 1) + \beta(4x - 5y + 8) = 0.$$

Написать уравнение прямой этого пучка, проходящей через середину отрезка прямой $x+2y+4 = 0$, заключенного между прямыми: $2x+3y+5 = 0$ и $x + 7y - 1 = 0$.

4.24 Записать уравнение прямой, принадлежащей одновременно двум пучкам:

$$\alpha(x + y - 1) + \beta(x - 1) = 0 \qquad \text{и} \qquad \alpha(2x - 3y) + \beta(y + 1) = 0.$$

4.25 Определить, пересекает ли прямая $2x + y + 3 = 0$ отрезок, вершины которого имеют координаты: $(-5;1)$ и $(3;7)$.

4.26 Определить, при каких значениях p и q две прямые:

$$px - 2y - 1 = 0 \qquad \text{и} \qquad 6x - 4y - q = 0.$$

1) имеют общую точку, 2) параллельны, 3) совпадают.
4.27 Определить, при каком значении m две прямые:

$$(m-1)x+my-5=0 \qquad \text{и} \qquad mx+(2m-1)y+7=0$$

пересекаются в точке, лежащей на оси абсцисс.
4.28 Определить, при каком значении p прямые:
$2x-y+3=0$, $\quad x+y+3=0$ $\quad$ и $\quad px+y-13=0$
пересекаются в одной точке.
4.29 Дано уравнение пучка:

$$\alpha(5x+3y+6)+\beta(3x-4y-37)=0.$$

Доказать, что прямая $7x+2y-15=0$ не принадлежит этому пучку.
4.30 Определить, лежит ли точка $(-3;2)$ внутри или вне треугольника, стороны которого заданы уравнениями:
$x+y-4=0$, $\quad 3x-7y+8=0$ $\quad$ и $\quad 4x-y-31=0$.
4.31 Написать уравнение прямой, которая симметрична прямой $3x-5y+11=0$ относительно точки $(1;-4)$.
4.32 Написать уравнение прямой, которая симметрична прямой

$$\begin{cases} x=2+7t, \\ y=-5-4t \end{cases}$$

относительно точки $(5;-2)$.

§5 Прямая на плоскости (продолжение).

Вектор, ортогональный к прямой $ax+by+c=0$, имеет координаты $(a;b)$. Расстояние d от точки $(x_0;y_0)$ до прямой $ax+by+c=0$ вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|\ ax_0 + by_0 + c\ |}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Косинус угла φ между двумя прямыми, направляющие векторы которых $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вычисляется по формуле:

$$\cos(\varphi) = \frac{|(\vec{a},\vec{b})|}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Угловой коэффициент k прямой $ax+by+c=0$ (тангенс угла наклона к оси абсцисс) вычисляется по формуле: $k=-a/b$.

5.1 Найти расстояние от точки $(2;-1)$ до прямой $3x+4y+7=0$.
5.2 Найти расстояние между параллельными прямыми: $3x-4y-10=0$ и $6x-8y+5=0$.
5.3 Составить уравнения прямых, параллельных прямой $3x-4y-10=0$ и остоящих от нее на расстоянии $d=3$.
5.4 Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$ и $5x-12y+26=0$. Вычислить его площадь.
5.5 Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x-4y-12=0$ от координатного угла.
5.6 Точка $(2;-5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x-2y-7=0$. Вычислить площадь этого квадрата.
5.7 Доказать, что прямая $5x-2y-1=0$ параллельна прямым:
$5x-2y+7=0, \qquad 5x-2y-9=0$
и делит расстояние между ними пополам.
5.8 Даны три параллельные прямые:
$10x+15y-3=0, \qquad 2x+3y+5=0 \qquad$ и $\qquad 2x+3y-9=0.$
Доказать, что первая из них лежит между двумя другими, и вычислить

отношение, в котором она делит расстояние между ними.
5.9 Даны вершины треугольника: $A(-10;-13)$, $B(-2;3)$ и $C(2;1)$. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины C.
5.10 Дано уравнение пучка:

$$\alpha(2x+y+4)+\beta(x-2y-3)=0.$$

Доказать, что среди прямых этого пучка существует только одна прямая, отстоящая от точки $(2;-3)$ на расстоянии $\sqrt{10}$, и написать уравнение этой прямой.
5.11 Написать уравнения биссектрис углов, образованных двумя прямыми:
$2x-9y+18=0$ и $6x+7y-21=0$.
5.12 Написать уравнение биссектрисы угла между прямыми:
$3x-y-4=0$ и $2x+6y+3=0$,
в котором лежит начало координат.
5.13 Написать уравнение биссектрисы острого угла, образованного двумя прямыми:
$3x+4y-5=0$ и $5x-12y+3=0$.
5.14 Написать уравнение биссектрисы тупого угла, образованного двумя прямыми:
$x-3y+5=0$ и $3x-y+15=0$.
5.15 Доказать, что через точку $(2;7)$ можно провести две прямые так, чтобы их расстояние от точки $(1;2)$ были равны 5. Написать уравнения этих прямых.
5.16 Вычислить угол между двумя прямыми:

$$\begin{array}{lll} a)\ \ 3x-y=0 & \text{и} & 2x+y-5=0; \\ b)\ \ 4x-y-7=0 & \text{и} & x+4y-8=0. \end{array}$$

5.17 Найти угловой коэффициент прямой, зная, что она проходит через точки $(2;-8)$ и $(-1;7)$.
5.18 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(1;2)$ и равноудаленной от точек $(3;3)$ и $(5;2)$.
5.19 Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $(-5;2)$ на прямую $4x-y+3=0$.
5.20 Написать уравнения высот треугольника, зная уравнения его сторон:
$2x-y+3=0$, $x+5y-7=0$ и $3x-2y+6=0$.
5.21 Найти длину высот треугольника в задаче 5.20.

5.22 В треугольнике ABC известны: сторона $AB:\ 4x+y-12-0$, высота $BH:\ 5x-4y-15=0$ и высота $AH:\ 2x+2y-9=0$. Написать уравнения двух других сторон и третьей высоты.
5.23 Найти координаты ортогональной проекции точки $(-2;4)$ на прямую $2x-3y-8=0$.
5.24 Найти координаты ортогональной проекции точки $(-1;3)$ на прямую

$$\begin{cases} x=2+t, \\ y=-4t. \end{cases}$$

5.25 Найти координаты точки, симметричной точке $(2;1)$ относительно прямой

$$\begin{cases} x=2+t, \\ y=3-4t. \end{cases}$$

5.26 Найти координаты точки, симметричной точке $(-2;-9)$ относительно прямой $2x+5y-38=0$.
5.27 Даны две вершины треугольника: $A(-6;2)$, $B(2;-2)$ и точка пересечения его высот $H(1;2)$. Найти координаты третьей вершины C.
5.28 Написать уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин: $A(2;-4)$ и уравнения биссектрис двух его углов:
$x+y-2=0$ и $x-3y-6=0$.

§6 Окружность.

Рассматривается прямоугольная декартова система координат на плоскости. Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, находящихся на фиксированном расстоянии от данной точки, называемой центром окружности. Расстояние от любой точки окружности до ее центра называется радиусом окружности. Окружность с центром $(x_0; y_0)$ и радиусом r имеет уравнение:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Прямая называется касательной к окружности, если она имеет с окружностью одну общую точку. Прямая касается окружности, если и только если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности.

Окружность $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$ разбивает множество точек плоскости, отличных от точек окружности, на два подмножества. Для точек одного подмножества вполняется неравенство: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < r^2$ (внутренность окружности), а для точек другого подмножества неравенство: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > r^2$ (внешность окружности).

Квадрат длины касательной, проведенной от точки $P(\tilde{x}; \tilde{y})$ до окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, равен:

$$(\tilde{x} - x_0)^2 + (\tilde{y} - y_0)^2 - r^2.$$

Последнее выражение называют так же степенью точки P относительно окружности. Радикальной осью двух окружностей называют геометрическое место точек, имеющих одинаковую степень относительно этих окружностей.

Углом между двумя окружностями называется угол между касательными к этим окружностям в точке пересечения.

6.1 Написать уравнение окружности, которая
1) имеет центр в точке $(-2; 5)$ и радиус 7;
2) имеет центр в точке $(2; -3)$ и проходит через точку $(0; 4)$.
6.2 Написать уравнение окружности, если AB - ее диаметр и известны координаты концов диаметра: $A(3; 1)$, $B(-3; 3)$.

6.3 Написать уравнение окружности, если она проходит через точки $(2;3)$ и $(5;2)$, а ее центр лежит на оси OX.
6.4 Написать уравнение окружности, если она проходит через точки $(3;0)$ и $(-1;2)$, а ее центр лежит на прямой $x-y+2=0$.
6.5 Написать уравнение окружности, если она проходит через три точки, координаты которых:
1) $(7;7)$, $(0;8)$, $(-2;4)$;
2) $(0;4)$, $(1;2)$, $(3;-2)$.
6.6 Как расположены точки: $(2;0)$, $(4;-2)$, $(0;-4)$, $(16;2)$, $(-2;3)$ относительно окружности $(x-6)^2+(y+4)^2=36$?
6.7 Доказать, что следующие кривые являются окружностями:
1) $x^2+y^2-6x-2=0$,
2) $x^2+y^2+4y-12=0$,
3) $3x^2+3y^2-6x-12y-7=0$.
Найти их центр и радиус.
6.8 Какой вид примет уравнение окружности $x^2+y^2+2x-6y-9=0$, если начало координат перенести в точку $1)(-1;3)$, $2)(-5;8)$?
6.9 Как преобразуются уравнения окружностей:
1) $x^2+y^2-4x-2y-1=0$,
2) $x^2+y^2-6x-8y+1=0$,
если начало координат перенести в их центр?
6.10 Найти точки пересечения окружности с осями координат в следующих случаях:
1) $(x-4)^2+(y+3)^2=25$,
2) $x^2+y^2-6x-10y+9=0$.
6.11 Написать уравнение окружности, если она касается оси OX в начале координат и пересекает ось OY в точке $(0;4)$.
6.12 Написать уравнение окружности, если она касается оси OY в точке $(0;-3)$ и имеет радиус 2.
6.13 Написать уравнение окружности, если она касается осей координат и проходит через точку $(2;9)$.
6.14 Написать уравнение окружности, если она имеет центр $(6;7)$ и касается прямой $5x-12y-24=0$.
6.15 Найти точки пересечения окружности $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ с прямыми:
1) $x-y-4=0$,
2) $3x-4y+36=0$.
6.16 Через точку $(2;\ -0,5)$ провести хорду окружности $(x-1)^2+y^2=4$,

которая делится в этой точке пополам.

6.17 Написать уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=5$ в точке $(1;-2)$.

6.18 Написать уравнения касательных, проведенных
1) из начала координат к окружности $(x-2)^2+(y-4)^2=2$,
2) из точки $(7;1)$ к окружности $x^2+y^2=25$.

6.19 Написать уравнения касательных к окружности $x^2+y^2=5$, которые параллельны прямой $4x-2y+13=0$.

6.20 Написать уравнение окружности, которая касается касается прямых: $7x+y-3=0$ и $x+7y-3=0$ и проходит через точку $(1;1)$.

6.21 Доказать, что прямая $4x-3y-38=0$ касается окружности $(x-1)^2+(y+3)^2=25$ и найти точку их касания.

6.22 Написать уравнение прямой, на которой лежат центры следующих окружностей:

$$x^2+y^2-6x+8y=0 \qquad \text{и} \qquad x^2+y^2+2x-12y+1=0.$$

6.23 Написать уравнение общей хорды следующих окружностей:

$$x^2+y^2=10 \qquad \text{и} \qquad x^2+y^2-10x-10y+30=0.$$

6.24 Под каким углом пересекаются следующие окружности:
1) $x^2+y^2=16 \qquad \text{и} \qquad (x-5)^2+y^2=9$,
2) $x^2+y^2=9 \qquad \text{и} \qquad x^2+(y-3)^2=4$?

6.25 Написать уравнение общих касательных двух окружностей:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=1 \qquad \text{и} \qquad (x+2)^2+(y+1)^2=9.$$

6.26 Найти длины касательных, проведенных к окружности $x^2+y^2-10x+2y+10=0$ из следующих точек: 1)$A(0;-1)$, 2)$B(1;-1)$.

6.27 Найти уравнение радикальной оси следующих окружностей:
1) $x^2+y^2-6x-4y+9=0 \qquad \text{и} \qquad x^2+y^2-2x+10y+25=0$,
2) $x^2+(y-1)^2=5 \qquad \text{и} \qquad (x+2)^2+(y+1)^2=4$.

§7 Эллипс, гипербола, парабола.

Рассматривается прямоугольная декартова система координат на плоскости. Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Пусть числа a и b такие, что $a > b > 0$. a называют большой полуосью, а b - малой полуосью. Точки с координатами $(\pm a, 0)$ и $(0, \pm b)$ называются вершинами эллипса; число $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ - линейным эксцентриситетом, а число $e = c/a$ - эксцентриситетом. Точки с координатами $(\pm c, 0)$ нызываются фокусами эллипса. Прямые $x = \pm a/e$ нызываются директрисами эллипса.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Будем считать,что числа a и b - положительны. Число a называют действительной полуосью, а b - мнимой полуосью. Точки с координатами $(\pm a, 0)$ называются вершинами гиперболы; число $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ - линейным эксцентриситетом, а число $e = c/a$ - эксцентриситетом. Точки с координатами $(\pm c, 0)$ нызываются фокусами гиперболы. Прямые $x = \pm\frac{a}{e}$ нызываются директрисами гиперболы. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ называются асимптотами гиперболы.

Каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2px,$$

где коэффициент p не равен нулю. Число p называют фокальным параметром параболы. Точку с координатами: $(0, 0)$ называют вершиной параболы, точку с координатами: $(p/2, 0)$ нызывают фокусом параболы. Прямую $x = -p/2$ нызывают директрисой параболы.

7.1 Написать каноническое уравнение эллипса, если
1) полуоси его равны 4 и 2;
2) расстояние между фокусами равно 6 и большая полуось равна 5;

3) большая полуось равна 10 и эксцентриситет равен $0,8$;

4) малая полуось равна 3 и эксцентриситет равен $\sqrt{2}/2$;

5) сумма полуосей равна 8 и расстояние между фокусами равно 8.

7.2 Дано уравнение эллипса: $25x^2 + 169y^2 = 225$ Вычислить длину осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса.

7.3 На эллипсе $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ найти точку, отстоящую на расстоянии пяти единиц от его малой оси.

7.4 Эллипс проходит через точки $A(\sqrt{3}; -2)$ и $B(-2\sqrt{3}; 1)$. Написать каноническое уравнение эллипса.

7.5 На эллипсе, один из фокусов которого имеет координаты $(3; 0)$, взята точка $A(4;\ 2,4)$. Найти расстояние от этой точки до соответсвующей директрисы (эллипс задан каноническим уравнением).

7.6 Найти точки пересечения эллипса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ и прямой $2x - y - 9 = 0$.

7.7 Через фокус эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ проведена хорда, перпендикулярная к большой оси. Найти длину этой хорды.

7.8 Вычислить длину стороны квадрата, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

7.9 Дан эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, написать уравнение хорды, проходящей через точку $(1; 1)$ и делящейся в этой точке пополам.

7.10 Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что

1) расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами равно 10;

2) вещественная полуось равна 5 и вершины делят расстояния между центром и фокусами пополам;

3) вещественная ось равна 6 и гипербола проходит через точку $(9; -4)$;

4) гипербола проходит через две точки: $(-5; 2)$ и $(2\sqrt{5}; \sqrt{2})$.

7.11 Написать каноническое уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$, если ее эксцентриситет $e = 1,25$.

7.12 Написать каноническое уравнение гиперболы, если она проходит через точку $(12; 3\sqrt{3})$ и ее асимптотами являются прямые $y = \pm 0,5x$.

7.13 Найти точки пересечения гиперболы $\frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{36} = 1$ с прямой $2x + y - 18 = 0$.

7.14 Дана гипербола $9x^2 - 16y^2 = 576$. Найти уравнение диаметра, длина которого равна 20.

7.15 Дана гипербола $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, написать уравнение хорды, проходящей через точку $(3; -1)$ и делящейся в этой точке пополам.

7.16 Написать каноническое уравнение параболы, зная, что

1) расстояние от фокуса директрисы равно 8;

2) фокус имеет координаты $(5, 0)$;
3) парабола проходит через точку $(1; -4)$;

7.17 На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, фокальный радиус вектор которой равен 20.

7.18 Найти точку пересечения параболы $y^2 = 18x$ с прямой $6x + y - 6 = 0$.

7.19 Найти точки пересечения параболы $y^2 = 12x$ с эллипсом $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

7.20 Дана парабола $y^2 = 4x$, написать уравнение хорды, проходящей через точку $(2; 1)$ и делящейся в этой точке пополам.

7.21 Используя параллельный перенос системы координат, показать, что следующие кривые являются эллипсами и написать их канонические уравнения в новых координатах:
1) $x^2 + 2y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$,
2) $2x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 12 = 0$,
3) $6x^2 + 2y^2 + 18x - 8y = 0$.

7.22 Используя параллельный перенос системы координат, показать, что следующие кривые являются гиперболами и написать их канонические уравнения в новых координатах:
1) $x^2 - 4y^2 - 12x + 8y - 7 = 0$,
2) $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 5 = 0$,
3) $6x^2 - 2y^2 + 12x + 4y = 0$.

7.23 Используя параллельный перенос системы координат, показать, что следующие кривые являются параболами, написать их канонические уравнения в новых координатах.
1) $y^2 - 12x + 2y - 3 = 0$,
2) $4y^2 + 4x - 8y - 1 = 0$,
3) $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$.

7.24 Используя поворот осей координат на нужный угол, показать, что следующая кривая: $xy = 1$ является гиперболой и написать ее каноническое уравнение в новых координатах. Относительно старой системы координат определить координаты ее вершин и уравнение вещественной оси.

7.25 Используя параллельный перенос системы координат, привести уравнения кривых к уравнениям, не содержащим неизвестные в первой степени:
1) $x^2 + 3xy + 4y^2 - 12x + 8y - 3 = 0$,
2) $5x^2 - 7xy + 4y^2 + 10x - 12y - 11 = 0$.

§8 Касательная к эллипсу, гиперболе, парабола. Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы.

Рассматривается прямоугольная декартова система координат на плоскости. Пусть точка $M(x_0, y_0)$ лежит на эллипсе, который задан каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Тогда уравнение касательной к эллипсу в точке M имеет вид:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Пусть точка $M(x_0, y_0)$ лежит на гиперболе, которая задана каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Тогда уравнение касательной к гиперболе в точке M имеет вид:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Пусть точка $M(x_0, y_0)$ лежит на параболе, которая задана каноническим уравнением:

$$y^2 = 2px.$$

Тогда уравнение касательной к параболе в точке M имеет вид:

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Пусть эллипс, гипербола и парабола заданы каноническими уравнениями. Выберем полярную систему координат следующим образом: в случае эллипса полюс поместим в левый фокус, в случае гиперболы полюс поместим в правый фокус, в случае параболы полюс поместим в фокус; в качестве полярной оси во всех трех случаях возьмем ось OX. Тогда полярное уравнение эллипса, гиперболы и параболы имеет вид:

$$r = \frac{p}{1 - e\cos(\varphi)},$$

где (r, φ) - полярные координаты, p - фокальный параметр (дла эллипса и гиперболы $p = b^2/a$), e - эксцентриситет (для параболы $e = 1$). Отметим, что в случае гиперболы записывается полярное уравнение только ее правой ветви.

8.1 Написать уравнения касательных, проведенных из точки $A(-6; 3)$ к эллипсу $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$.
8.2 Написать уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$, параллельных прямой $2x - y + 17 = 0$.
8.3 Написать уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$, перпендикулярных прямой $13x + 12y - 115 = 0$.
8.4 Известно, что прямая $4x - 5y - 40 = 0$ касается эллипса $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$. Найти точку прикосновения.
8.5 Найти уравнения тех касательных к эллипсу $3x^2 + 8y^2 = 45$, расстояния которых от центра эллипса равны 3.
8.6 Найти уравнения общих касательных к двум эллипсам: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ и $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$.
8.7 Написать уравнение прямой, которая касается гиперболы $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ в точке $(5; -4)$.
8.8 Написать уравнения касательных, проведенных из точки $A(2; 0)$ к гиперболе $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$.
8.9 Написать уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$, параллельных прямой $x + y - 7 = 0$.
8.10 Написать уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, которая находилась бы на одинаковом расстоянии от центра и от правого фокуса.
8.11 Написать уравнения касательных, проведенных из точки $A(5; -7)$ к параболе $y^2 = 8x$.
8.12 Известно, что прямая $x + 3y + 9 = 0$ касается параболы $y^2 = 4x$. Найти точку прикосновения.
8.13 Дана парабола $y^2 = 12x$. Написать уравнение касательной к данной

параболе, которая образует угол $\frac{\pi}{4}$ с прямой $4x - 2y + 9 = 0$.

8.14 Написать уравнения общих касательных к эллипсу $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ и параболе $y^2 = \frac{20}{3}x$.

8.15 Написать полярное уравнение эллипса $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$, приняв ось OX за полярную ось и поместив полюс в левый фокус.

8.16 Написать уравнения асимптот и директрис гиперболы $r = \frac{2}{1-\sqrt{2}\cos(\varphi)}$.

8.17 Написать канонические уравнения следующих кривых:

1) $r = \frac{25}{13-12\cos(\varphi)}$;
2) $r = \frac{1}{3-3\cos(\varphi)}$;
3) $r = \frac{9}{4-5\cos(\varphi)}$;
4) $r = \frac{4}{\sqrt{5}-\cos(\varphi)}$.

§9 Векторное и смешанное произведение. Двойное векторное произведение.

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторв $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число равное объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятое со знаком плюс, если тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - правая и со знаком минус, если тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - левая. Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ обозначим символом $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Отметим важные свойства смешанного произведения. Смешанное произведение - функция линейная по каждому своему аргументу; при циклической замене аргументов смешанное произведение не меняется, при перемене мест любых двух аргументов смешанное произведение меняет знак.

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который 1) ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$; 2) длина его численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$; 3) тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - правая. Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначим символом $[\vec{a}, \vec{b}]$. Отметим важные свойства векторного произведения. Векторное произведение - функция линейная по каждому аргументу, при перестановке аргументов векторное произведение меняет знак.

Следующая формула связывает векторное и смешанное произведение:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}).$$

Выражение вида $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}]$ или $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$ называется двойным векторным произведением. Имеет место следующая формула:

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}),$$

из которой легко получить тождество Якоби:

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] + [\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]] + [\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]] = \vec{0}.$$

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ заданы своими координатами относительно правого ортонормированного базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$: $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c}(x_3; y_3; z_3)$, то имеют место следующие выражения векторного и смешанного произведения в координатах:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \qquad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

9.1 Вычислить синус угла, между векторами:
a) $\vec{a}(2; -2; 1)$ и $\vec{b}(2; 3; 6)$,
b) $\vec{a}(3; -1; 0)$ и $\vec{b}(4; 5; -6)$.
9.2 Даны точки: $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.
9.3 Даны вершины треугольника: $A(1; -1; 2)$, $B(5, -6, 2)$, $C(1, 3 - 1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.
9.4 Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он ортогонален векторам $\vec{a}(2; -3; 1)$ и $\vec{b}(1; -2; 3)$ и удовлетворяет условию: $(\vec{x}, \vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.
9.5 Даны три вектора: $\vec{a}(1; -1; 3)$, $\vec{b}(-2; 2; 1)$, $\vec{c}(3; -2; 5)$.
Вычислить $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
9.6 Установить, компланарны ли векторы:
1) $\vec{a}(2; 3; -1)$, $\vec{b}(1; -1; 3)$, $\vec{c}(1; 9; -11)$;
2) $\vec{a}(3; -2; 1)$, $\vec{b}(2; 1; 2)$, $\vec{c}(3; -1; -2)$;
3) $\vec{a}(2; -1; 2)$, $\vec{b}(1; 2; -3)$, $\vec{c}(3; -4; 7)$.
9.7 Проверить, лежат ли четыре точки $A(1; 2 - 1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ в одной плоскости.
9.8 Даны вершины тетраэдра: $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$, $D(4; 1; 3)$. Вычислить его объем.
9.9 Даны вершины тетраэдра: $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.
9.10 Объем тетраэдра равен 5 , три его вершины находятся в точках: $A(2; 1 - 1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$. Найти координаты четвертой вершины, если известно, что она лежит на оси OY.
9.11 Даны векторы: $\vec{a}(2; -3; 1)$, $\vec{b}(-3; 1; 2)$ и $\vec{c}(1; 2; 3)$. Вычислить $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}]$ и $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$.
9.12 Даны вершины треугольника: $A(2; -1; -3)$, $B(1; 2; -4)$, $C(3; -1; -2)$.

Используя двойное векторное произведение, вычислить координаты вектора $\vec{h}$, коллинеарного с его высотой, опущенной из вершины A на противоположную сторону, если вектор $\vec{h}$ образует с осью OY тупой угол и $|\vec{h}| = 2\sqrt{34}$.

9.13 Доказать тождества:

1) $([\vec{a},\vec{b}],[\vec{c},\vec{d}]) = (\vec{a},\vec{c})(\vec{b},\vec{d}) - (\vec{a},\vec{d})(\vec{b},\vec{c})$;
2) $([\vec{a},\vec{b}],[\vec{c},\vec{d}]) + ([\vec{a},\vec{c}],[\vec{d},\vec{b}]) + ([\vec{a},\vec{d}],[\vec{b},\vec{c}]) = 0$;
3) $[[\vec{a},\vec{b}],[\vec{c},\vec{d}]] = (\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c} - (\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}$;
4) $([\vec{a},\vec{b}],[\vec{b},\vec{c}],[\vec{c},\vec{a}]) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2$;
5) $[\vec{a},[\vec{b},[\vec{c},\vec{d}]]] = (\vec{b},\vec{d})[\vec{a},\vec{c}] - (\vec{b},\vec{c})[\vec{a},\vec{d}]$;
6) $[\vec{a},[\vec{b},[\vec{c},\vec{d}]]] = (\vec{a},\vec{c},\vec{d})\vec{b} - (\vec{a},\vec{b})[\vec{c},\vec{d}]$.

9.14 Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ отложены от общей точки. Доказать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна к вектору $[\vec{a},\vec{b}] + [\vec{b},\vec{c}] + [\vec{c},\vec{a}]$.

9.15 Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Известны координаты четырех его вершин: $A(0;0;0)$, $B(1;-1;0)$, $D(2;5;0)$, $A_1(-4;-3;8)$. Используя векторное и смешанное произведение, найти угол между высотой параллелепипеда, проведенной из вершины A_1 и ребром A_1A.

9.16 Каждой грани тетраэдра сопоставим ортогональный ей вектор, который удовлетворяет следующим свойствам: 1) если вектор отложить от точки грани, которой он сопоставлен, то он лежит вне тетраэдра; 2) длина вектора численно равна площади грани, которой он сопоставлен. Используя векторное произведение, доказать, что сумма четырех полученных векторов равна нулю.

§10 Плоскости и прямые в пространстве.

Общее уравнение плоскости имеет вид: $ax + by + cz + d = 0$, где a, b, c, d - вещественные константы.

Параметрические уравнения плоскости, проходящей через точку $(x_0; y_0; z_0)$ и параллельной двум неколлинеарным векторам $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1u + b_1v, \\ y = y_0 + a_2u + b_2v, \\ z = z_0 + a_3u + b_3v; \end{cases}$$

где u и v - параметры, пробегающие множество вещественных чисел.

Уравнение той же плоскости можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Пусть даны две плоскости: $a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$ и $a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$. Рассмотрим матрицы:

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

Возможны три случая.

a) rang(N)=1. В этом случае плоскости совпадают, и имеют место равенства:

$$\begin{cases} a_2 = \lambda a_1, \\ b_2 = \lambda b_1, \\ c_2 = \lambda c_1, \\ d_2 = \lambda d_1 \end{cases}$$

для некоторого ненулевого λ.

b) rang(M)=1 и rang(N)=2. В этом случае плоскости параллельны, и имеют место соотношения:

$$\begin{cases} a_2 = \lambda a_1, \\ b_2 = \lambda b_1, \\ c_2 = \lambda c_1, \\ d_2 \neq \lambda d_1 \end{cases}$$

для некоторого ненулевого λ.
c) rang(M)=2. В этом случае плоскости пересекаются.

Плоскость $ax + by + cz + d = 0$ параллельна вектору $(l; m; n)$, тогда и только тогда, когда выполняется условие: $al + bm + cn = 0$.

Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0; z_0)$ и параллельной вектору $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \\ z = z_0 + a_3 t, \end{cases}$$

где t - параметр, пробегающий множество вещественных чисел; а канонические уравнения имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

Вектор $\vec{a}$ называют направляющим вектором прямой.

Прямую можно задавать как пересечение двух плоскостей. Система уравнений(каждое уравнение системы является уравнением плоскости):

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

задает прямую, если ранг матрицы системы (матрицы M) равен 2.

10.1 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; 4; -5)$ параллельно двум векторам $\vec{a}(3; 1; -1)$ и $\vec{b}(1; -2; 1)$.
10.2 Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; -1; 3)$ и $B(3; 1; 2)$ параллельно вектору $\vec{a}(3; -1; 4)$.
10.3 Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки: $A(3; -1; 2)$, $B(4; -1; -1)$, $C(2; 0; 2)$.
10.4 Выяснить, параллельны ли следующие плоскости:
1) $3x - 4y + 7z - 1 = 0$ и $6x - 8y + 14z + 13 = 0$;
2) $x - 3y + 5z - 11 = 0$ и $x + 3y + 5z + 3 = 0$;

3) $x - 3y + 12 = 0$ и $3x - 9y + 17 = 0$.

10.5 Определить, при каких l и m следующие плоскости параллельны:

1) $2x + ly + 3z - 5 = 0$ и $mx - 6y - 6z + 2 = 0$;
2) $3x - y + lz - 9 = 0$ и $2x + my + 2z - 3 = 0$;
3) $mx + 3y - 2z - 1 = 0$ и $2x - 5y - lz = 0$.

10.6 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; -2; -7)$ параллельно плоскости $4x - 6z + 19 = 0$.

10.7 Доказать, что три плоскости: $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$, $x - 3y + 2z - 11 = 0$ имеют одну общую точку, и найти ее координаты.

10.8 Доказать, что три плоскости: $7x + 4y + 7z + 1 = 0$, $2x - y - z + 2 = 0$, $x + 2y + 3z - 1 = 0$ проходят через одну прямую.

10.9 Доказать, что три плоскости: $2x - y + 3z - 5 = 0$, $3x + y + 2z - 1 = 0$, $4x + 3y + z + 2 = 0$ пересекаются по трем различным параллельным прямым.

10.10 Написать уравнение плоскости, которая проходит

1) через точку $(2; -3; 3)$ параллельно плоскости XOY;
2) через точку $(1; -2; 4)$ параллельно плоскости XOZ;
3) через точку $(-5; 2; -1)$ параллельно плоскости YOZ.

10.11 Написать уравнение плоскости, которая проходит

1) через ось OX и точку $(4; -1; 2)$;
2) через ось OY и точку $(1; 4; -3)$;
3) через ось OZ и точку $(3; -4; 7)$.

10.12 Написать уравнение плоскости, которая проходит

1) через точки $(7; 2; -3)$ и $(5; 6; -4)$ параллельно оси OX;
2) через точки $(2; -1; 1)$ и $(3; 1; 2)$ параллельно оси OY;
3) через точки $(3; -2; 5)$ и $(2; 3; 1)$ параллельно оси OZ.

10.13 Написать уравнения прямых, образованных пересечением плоскости $5x - 7y + 2z - 3 = 0$ с координатными плоскостями.

10.14 Написать уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x - y - 7z + 9 = 0$ с плоскостью, проходящей через ось OX и точку $(3; 2; 5)$.

10.15 Найти точки пересечения прямой

$$\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

с координатными плоскостями.

10.16 Определить, при каком значении d прямая

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + d = 0, \\ 3x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

1) пересекает ось OX;
2) пересекает ось OY;
3) пересекает ось OZ.

10.17 Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $(3; 2; 1)$ параллельно
1) вектору $\vec{a}(1; -9; 5)$;
2) прямой $\frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{-11} = \frac{z-9}{7}$;
3) оси OX;
4) оси OY;
5) оси OZ.

10.18 Написать канонические уравнения прямой, проходящей через две точки: $(3; 2; 1)$ и $(0; -7; -5)$.

10.19 Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $(-3; 8; 1)$ параллельно
1) вектору $\vec{a}(0; -5; 1)$;
2) прямой $\frac{x+11}{-5} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-1}{-4}$;
3) оси OX;
4) оси OY;
5) оси OZ;
6) прямой $\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 18 - 6t, \\ z = -8 + 8t. \end{cases}$

10.20 Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через две точки: $(-13; 2; 11)$ и $(10; -7; -15)$.

10.21 Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $(2; 3; -5)$ параллельно прямой

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

10.22 Написать канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$$

10.23 Написать параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

10.24 Параллельны ли следующие прямые:

$$1)\ \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x=5+2t, \\ y=28-t, \\ z=21+t \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x+y-3z+1=0, \\ x-y+z+3=0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x+2y-5z-1=0, \\ x-2y+3z-9=0? \end{cases}$$

10.25 Даны прямые:

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{l}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}.$$

При каком l они пересекаются?

10.26 Написать уравнения прямой, которая проходит через точку $(-4;-5;3)$ и пересекает две прямые:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}.$$

10.27 Написать параметрические уравнения прямой, которая симметрична прямой

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-2}{1}$$

относительно точки $(0;1;2)$.

10.28 Написать канонические уравнения прямой, которая симметрична прямой

$$\begin{cases} x=3+2t, \\ y=2-t, \\ z=1+t \end{cases}$$

относительно точки $(2;0;2)$.

§11 Плоскости и прямые в пространстве (продолжение).

Совокупность плоскостей, проходящих через некоторую фиксированную прямую l называется пучком плоскостей с осью l. Если плоскости: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ пересекаются по прямой l, то множество плоскостей, проходящих через прямую l, описывается соотношением:

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,$$

где α и β - вещественные числа одновременно не равные нулю. Последнее выражение называют уравнением пучка.

Совокупность плоскостей, проходящих через некоторую фиксированную точку P называется связкой плоскостей с центром P. Если плоскости: $a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$ и $a_3x+b_3y+c_3z+d_3 = 0$ имеют единственную общую точку P, то множество плоскостей, проходящих через точку P, описывается соотношением:

$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)+\gamma(a_3x+b_3y+c_3z+d_3) = 0,$$

где α, β и γ- вещественные числа одновременно не равные нулю. Последнее выражение называют уравнением связки.

Плоскость $ax + by + cz + d = 0$ разбивает множество точек пространства отличных от точек плоскости на два множества (два полупространства). Для точек одного полупространства имеет место неравенство $ax + by + cz + d > 0$, а для точек другого полупространства неравенство $ax + by + cz + d < 0$.

11.1 Определить, лежат ли точка $(3; 5; 1)$ и начало координат по одну или разные стороны относительно плоскости $x + 2y + 3z - 7 = 0$.
11.2 Выяснить, пересекает ли плоскость $2x + 3y + 17z - 2 = 0$ отрезок с вершинами $(1; 4; -3)$ и $(2; 5; 0)$.
11.3 Определить, лежат ли точка $(2; -1; 3)$ и начало координат в одном двугранном угле, смежных или вертикальных двугранных углах, образованных при пересечении двух плоскостей:

1) $2x - y + 3z - 5 = 0$ и $3x + 2y - z + 3 = 0$;
2) $2x + 3y - 5z - 15 = 0$ и $5x - y - 3z - 7 = 0$;
3) $x + 5y - z + 1 = 0$ и $2x + 17y + z + 2 = 0$.

11.4 Определить, лежит ли точка $(3; 2; -1)$ внутри острого или тупого двугранного угла, образованного двумя плоскостями:
$5x - y + z + 3 = 0$ и $4x - 3y + 2z + 5 = 0$.

11.5 В пучке плоскостей:

$$2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0$$

найти плоскость (написать ее уравнение), которая:
1) проходит через точку $(1; -2; 3)$;
2) параллельна оси OX;
3) параллельна оси OY;
4) параллельна оси OZ.

11.6 Написать уравнение плоскости, которая проходит через прямую пересечения двух плоскостей:
$3x - y + 2z + 9 = 0$ и $x + z - 3 = 0$
1) и через точку $(4; -2; -3)$;
2) параллельно оси OX;
3) параллельно оси OY;
4) параллельно оси OZ.

11.7 Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения двух плоскостей: $2x - y + 3z - 5 = 0$ и $x + 2y - z + 2 = 0$ параллельно вектору $\vec{a}(2; -1; -2)$.

11.8 Определить, принадлежит ли плоскость $5x - 9y - 2z + 12 = 0$ пучку плоскостей:

$$\alpha(2x - 3y + z - 5) + \beta(x - 2y - z - 7) = 0.$$

11.9 Определить, при каких l и m плоскость $5x + ly + 4z + m = 0$ принадлежит пучку плоскостей:

$$\alpha(3x - 7y + z - 3) + \beta(x - 9y - 2z + 5) = 0.$$

11.10 Определить, при каких l и m плоскости:
$2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y - z + m = 0$ и $x + ly - 6z + 10 = 0$
1) имеют одну общую точку;
2) проходят через одну прямую;

3) пересекаются по трем различным параллельным прямым.

11.11 Даны вершины треугольника: $(3;6;-7)$, $(-5;2;3)$ и $(4;-7;-2)$. Написать параметрические уравнения его медиан.

11.12 Определить, как расположены прямые, заданные уравнениями:

$$\begin{cases} x = -3 + 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = 6 - 4t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 5 + t, \\ y = -1 - 4t, \\ z = -4 + t. \end{cases}$$

11.13 Определить, как расположены прямая

$$\begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 1 - 4t, \\ z = -5 + 4t \end{cases}$$

и плоскость $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

11.14 Определить, как расположены прямая

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

и плоскость $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

11.15 Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$$

и плоскости $2x + 3y + z - 1 = 0$.

11.16 Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $(2;-4;-1)$ и середину отрезка прямой

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z - 26 = 0, \\ 3x - 3y - 2z - 5 = 0, \end{cases}$$

заключенного между плоскостями:

$5x + 3y - 4z + 11 = 0$ и $5x + 3y - 4z - 41 = 0$.

11.17 Определить, при каком значении c прямая

$$\begin{cases} 3x - 2y + z + 3 = 0, \\ 4x - 3y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$$

параллельна плоскости $2x - y + cz - 2 = 0$.
11.18 Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - 3t, \\ z = -3 + 2t \end{cases}$$

и точку $(2; -2; 1)$.
11.19 Написать уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2} \qquad \text{и} \qquad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}.$$

11.20 Написать канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $(3; -2; -4)$ параллельно плоскости $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ и пересекает прямую

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}.$$

11.21 Написать параметрические уравнения прямой, которая параллельна плоскостям:
$3x + 12y - 3z - 5 = 0$ и $3x - 4y + 9z + 7 = 0$
и пересекает прямые:

$$\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3} \qquad \text{и} \qquad \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

11.22 Определить, при каких значениях параметров a и d плоскости:
$2x + y - z + 3 = 0,\quad x - 3y + 5 = 0$ и $ax + y - 2z + d = 0$
принадлежат одному пучку.
11.23 Проверить, что плоскости:
$3x - 4y + 5 = 0,\quad x - 2z + 1 = 0$ и $2y - 3z - 1 = 0$
принадлежат одному пучку.
11.24 В связке, опеделяемой плоскостями:
$x + y - z + 2 = 0,\quad 4x - 3y + z - 1 = 0$ и $2x + y - 5 = 0$
найти плоскость:
1) проходящую через ось OX;
2) параллельную плоскости XOZ;
3) проходящую через начало координат и точку $(1; 3; 2)$.
11.25 Написать уравнение плоскости, которая симметрична плоскости

$2x - 3y + 4z + 1 = 0$ относительно
a) точки $(0; 0; 0)$;
b) точки $(1; -1; 2)$.

§12 Плоскости и прямые в пространстве (продолжение).

Рассмотрим плоскость, заданную уравнением $ax+by+cz+d=0$. Вектор, ортогональный (нормальный) к данной плоскости, имеет координаты $(a;b;c)$.

Косинус угла φ между двумя плоскостями, ортогональные векторы которых $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вычисляется по формуле:

$$\cos(\varphi) = \frac{|(\vec{a},\vec{b})|}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Косинус угла φ между двумя прямыми, направляющие векторы которых $\vec{m}$ и $\vec{n}$, вычисляется по формуле:

$$\cos(\varphi) = \frac{|(\vec{m},\vec{n})|}{|\vec{m}||\vec{n}|}.$$

Синус угла φ между прямой с направляющим вектором $\vec{m}$ и плоскостью с ортогональным вектором $\vec{a}$ вычисляется по формуле:

$$\sin(\varphi) = \frac{|(\vec{m},\vec{a})|}{|\vec{m}||\vec{a}|}.$$

12.1 Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(2;1;-1)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n}(1;-2;3)$.
12.2 Даны две точки: $A(3;-1;2)$ и $B(4;-2;-1)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$.
12.3 Определить координаты какого-нибудь нормального вектора плоскости в каждом из следующих случаев:
1) $3x-5y+z-11=0$;
2) $x-7y+9z-1=0$;
3) $y+13z+8=0$.

12.4 Определить, какие из следующих пар плоскостей перпендикулярны:

1) $3x - 5y + z - 11 = 0$ и $6x - 10y + 2z + 17 = 0$;
2) $2x + 3y - z - 16 = 0$ и $x - y - z + 12 = 0$;
3) $y + 3z - 1 = 0$ и $x - 5y + z + 4 = 0$.

12.5 Определить, при каком значении l следующие пары плоскостей перпендикулярны:

1) $3x - 5y + lz - 11 = 0$ и $x + 3y + 2z + 17 = 0$;
2) $5x + y - 3z - 16 = 0$ и $2x + ly - 3z + 12 = 0$;
3) $7x - 2y - z - 1 = 0$ и $lx + y - 3z = 0$.

12.6 Найти двугранные углы, образованные пересечением следующих плоскостей:

1) $x - \sqrt{2}y + z - 9 = 0$ и $x + \sqrt{2}y - z + 8 = 0$;
2) $3y - z - 6 = 0$ и $2y + z + 2 = 0$;
3) $6x + 3y - 2z - 19 = 0$ и $x + 2y + 6z = 0$.

12.7 Написать уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям: $2x - y + 3z - 7 = 0$ и $x + 2y + z - 18 = 0$.

12.8 Написать уравнение плоскости, которая проходит через две точки $A(1; -1; -2)$ и $B(3; 1; 1)$ перпендикулярно к плоскости $2x - 4y - 6z - 15 = 0$.

12.9 Вычислить углы, между координатными осями и нормалями к плоскостям:

1) $x + \sqrt{2}y + z - 12 = 0$;
2) $x - y - \sqrt{2}z + 21 = 0$.

12.10 Написать уравнение плоскости, которая проходит через прямую пересечения плоскостей $3x - 2y + z - 3 = 0$ и $x - 2z = 0$ перпендикулярно к плоскости $2x - 4y + 2z + 7 = 0$.

12.11 Написать уравнения плоскостей, проектирующих прямую

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

на координатные плоскости.

12.12 Написать уравнения плоскости, проектирующей прямую

$$\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0, \\ 2x - 3y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

на плоскость $x + 2y + 3z - 5 = 0$.
12.13 Написать уравнение проекции прямой

$$\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0, \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

на плоскость $2x - y + z - 1 = 0$.
12.14 Даны вершины треугольника: $A(3; -1; -1)$, $B(1; 2; -7)$ и $C(-5; 14; -3)$. Написать канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.
12.15 Даны вершины треугольника: $A(2; -1; -3)$, $B(5; 2; -7)$ и $C(-7; 11; 6)$. Написать канонические уравнения биссектрисы его внешнего угла при вершине A.
12.16 Даны вершины треугольника: $A(1; -2; -4)$, $B(3; 1; -3)$ и $C(5; 1; -7)$. Написать параметрические уравнения высоты, опущенной из вершины B.
12.17 Проверить перпендикулярность следующих прямых:

$$1)\ \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = 1 - 6t \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x - 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

12.18 Найти угол между прямыми:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}} \qquad \text{и} \qquad \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

12.19 Найти косинус угла между прямыми:

$$\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0, \\ 2x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0, \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0. \end{cases}$$

12.20 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -3; -5)$ перпендикулярно к плоскости $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.
12.21 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку

$A(1;-1;-1)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$.
12.22 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;-2;1)$ перпендикулярно к прямой

$$\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$$

12.23 При каких значениях a и b плоскость $ax+by+3z-5=0$ перпендикулярна к прямой

$$\begin{cases} x=3+2t, \\ y=5-3t, \\ z=-2-2t. \end{cases}$$

12.24 Найти угол

1)между прямой $\begin{cases} x=-t, \\ y=2-5t, \\ z=11-8t \end{cases}$ и плоскостью $3x-y+5z+13=0$;

2)между прямой $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-7}{3}$ и плоскостью $x-6y+3z+11=0$.

§13 Плоскости и прямые в пространстве (продолжение).

Расстояние s от точки $P(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $ax + by + cz + d = 0$ вычисляется по формуле:

$$s = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Пусть даны точка $P(x_0; y_0; z_0)$ и прямая

$$\begin{cases} x = x_1 + lt, \\ y = y_1 + mt, \\ z = z_1 + nt. \end{cases}$$

Рассмотрим вектор $\vec{a}(x_1 - x_0;\ y_1 - y_0;\ z_1 - z_0)$ и направляющий вектор прямой $\vec{b}(l; m; n)$. Расстояние d от данной точки до данной прямой вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|[\vec{a}, \vec{b}]|}{|\vec{b}|}.$$

Пусть даны две скрещивающиеся прямые:

$$\begin{cases} x = x_1 + l_1 t, \\ y = y_1 + m_1 t, \\ z = z_1 + n_1 t \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x = x_2 + l_2 t, \\ y = y_2 + m_2 t, \\ z = z_2 + n_2 t. \end{cases}$$

Рассмотрим вектор $\vec{p}(x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2)$ и направляющие векторы этих прямых: $\vec{a}(l_1; m_1; n_1)$ и $\vec{b}(l_2; m_2; n_2)$. Расстояние d между данными скрещивающимися прямыми вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{p})|}{|[\vec{a}, \vec{b}]|}.$$

13.1 Найти расстоние от точки $P(-1; 1; -2)$ до плоскости, проходящей

через три точки: $A(1;-1;1)$, $B(-2;1;3)$, $C(4;-5;-2)$.
13.2 Найти расстояние между параллельными плоскостями:

1) $x-2y-2z-12=0$ и $x-2y-2z-6=0$;
2) $2x-3y+6z-14=0$ и $4x-6y+12z+21=0$;
3) $2x-y+2z+9=0$ и $4x-2y+4z-21=0$.

13.3 Две грани куба лежат на плоскостях $2x-2y+z-1=0$ и $2x-2y+z+5=0$. Вычислить объем этого куба.
13.4 На оси OY найти точку, отстоящую от плоскости $x+2y-2z-2=0$ на расстоянии $d=4$.
13.5 На оси OZ найти точку равноудаленную от точки $(1;-2;0)$ и от плоскости $3x-2y+6z-9=0$.
13.6 Написать уравнение плоскости, которая делит пополам тот двугранный угол между плоскостями $2x-y+2z-3=0$ и $3x+2y-6z-1=0$, в котором находится точка $(1;2;-3)$.
13.7 Написать уравнение плоскости, которая делит пополам острый двугранный угол между плоскостями $2x-3y-4z-3=0$ и $4x-3y-2z-3=0$.
13.8 Написать уравнение плоскости, которая делит пополам тупой двугранный угол между плоскостями $3x-4y-z+5=0$ и $4x-3y+z+5=0$.
13.9 Написать уравнение плоскости, которая принадлежит пучку плоскостей

$$\alpha(x-3y+7z+36)+\beta(2x+y-z-15)=0$$

и отстоит от начала координат на расстоянии $d=3$.
13.10 Написать уравнение плоскости, которая принадлежит пучку плоскостей

$$\alpha(10x-8y-15z+56)+\beta(4x+y+3z-1)=0$$

и отстоит от точки $(3;-2;-3)$ на расстоянии $d=7$.
13.11 Написать уравнение плоскости, которая принадлежит пучку плоскостей

$$\alpha(4x+13y-2z-60)+\beta(4x+3y+3z-30)=0$$

и отсекает от координатного угла XOY треугольник площадью равной 6.
13.12 Найти проекцию точки $(2;-1;3)$ на прямую

$$\begin{cases} x=3t, \\ y=-7+5t, \\ z=2+2t. \end{cases}$$

13.13 Найти точку B, симметричную точке $A(4;1;6)$ относительно прямой

$$\begin{cases} x-y-4z+12=0, \\ 2x+y-2z+3=0. \end{cases}$$

13.14 Найти точку B, симметричную точке $A(2;-5;7)$ относительно прямой, проходящей через точки $P(5;4;6)$ и $Q(-2;-17;-8)$.
13.15 Найти
a) проекцию точки $(5;2;-1)$ на плоскость $2x-y+3z+23=0$,
b) проекцию точки $(0;1;-2)$ на плоскость $x-2y+5z+3=0$.
13.16 Найти
a) точку симметричную точке $(1;3;-4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$,
b) точку симметричную точке $(0;1;-1)$ относительно плоскости $x+2y-z+1=0$.
13.17 На плоскости $2x-3y+3z-17=0$ найти точку, сумма расстояний от которой до точек $(3;-4;7)$ и $(-5;-14;17)$ была бы наименьшей.
13.18 Найти расстояние от точки $A(2;3;-1)$ до следующих прямых:

1) $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{x+25}{-2}$; 2) $\begin{cases} x=1+t, \\ y=2+t, \\ z=13+4t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-2y+z+3=0, \\ 3x-2y+2z+17=0. \end{cases}$

13.19 Доказать, что прямые:

$$\begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$$

параллельны и найти расстояние между ними.
13.20 Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{-2}$$

перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z-5=0$.
13.21 Найти расстояние между двумя прямыми в каждом из следующих случаев:

$$1)\ \ \frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2} \quad \text{и} \quad \frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1};$$

2) $\begin{cases} x = -4 + 2t, \\ y = 4 - t, \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -5 + 4t, \\ y = 5 - 3t, \\ z = 5 - 5t; \end{cases}$

3) $\dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y+5}{2} = \dfrac{z-1}{-2}$ и $\begin{cases} x = 9 + 6t, \\ y = -2t, \\ z = 2 - t. \end{cases}$

13.22 Написать канонические уравнения прямой, которая симметрична прямой

$$\begin{cases} x = -1 + 4t, \\ y = 1 - 3t, \\ z = 1 - 5t \end{cases}$$

относительно плоскости $x - y - 2z - 1 = 0$.

13.23 Написать параметрические уравнения прямой, которая симметрична прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+7}{2}$$

относительно плоскости $2x - 5y - z - 1 = 0$.

13.24 Написать уравнение плоскости, которая симметрична плоскости $3x - 4y + z - 2 = 0$ относительно прямой

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}.$$

13.25 Написать уравнение плоскости, которая симметрична плоскости $x + z - 4 = 0$ относительно прямой

$$\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 2 - t, \\ z = 3 - 2t. \end{cases}$$

§14 Элементарные свойства поверхностей второго порядка.

В евклидовом пространстве существует 17 типов поверхностей второго порядка. Приведем список.

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ - эллипсоид,

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ - мнимый эллипсоид,

3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ - однополостный гиперболоид,

4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ - двуполостный гиперболоид,

5) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ - конус,

6) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$ - мнимый конус,

7) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$ - эллиптический параболоид,

8) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$ - гиперболический параболоид,

9) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ - эллиптический цилиндр,

10) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ - гиперболический цилиндр,

11) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ - мнимый цилиндр,

12) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ - пара пересекающихся плоскостей,

13) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ - пара мнимых пересекающихся плоскостей,

14) $y^2=2px$ - параболический цилиндр,

15) $\dfrac{x^2}{a^2}=1$ - пара параллельных плоскостей,

16) $\dfrac{x^2}{a^2}=-1$ - пара мнимых параллельных плоскостей,

17) $x^2=0$ - пара совпавших плоскостей,

где a, b, c - отличные от нуля вещественные постоянные.

Уравнение сферы с центром $(x_0;y_0;z_0)$ и радиусом r имеет вид:

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$. Плоскость касается сферы тогда и только тогда, когда расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы. Сфера $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ разбивает множество точек пространства, отличных от точек сферы, на два подмножества. Для точек одного подмножества вполняется неравенство:
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<r^2$ (внутренность сферы), а для точек другого подмножества неравенство: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2>r^2$ (внешность сферы).

14.1 Используя параллельный перенос прямоугольной декартовой системы координат, определить тип и нарисовать следующие поверхности:
1) $2x^2+y^2+z^2-4x+6y+8z-1=0$,
2) $x^2-3y^2-4z^2-9y-16z-10=0$,
3) $5x^2+2y^2-6z^2-10x+8y-12z+23=0$,
4) $y^2+4z^2-x+4y-16z-3=0$,
5) $x^2-4z^2+2x-3y+24z=0$,
6) $y^2+z^2-4x-8z+5=0$,
7) $x^2-2z^2+10x-12z+7=0$,
8) $x^2-6x-3z+3=0$,
9) $z^2+20z-3=0$,
10) $x^2-z^2+4x+4z=0$.
14.2 Используя поворот вокруг прямой прямоугольной декартовой системы координат, определить тип и нарисовать следующие поверхности:
1) $2xy+3z^2-12=0$,
2) $5xz+7y=0$,
3) $2(x-y)^2+9z^2-32=0$,
4) $3(x-z)^2-5y=0$.
14.3 Используя поворот вокруг прямой и параллельный перенос прямоугольной декартовой системы координат, определить тип и нарисовать следующие поверхности:
1) $4xy+2z^2+8x-8y+4z-12=0$,
2) $yz-2x+4y-8z+1=0$,
3) $(x-z)^2+y^2-4x-2y-4z=0$,
4) $(y-z)^2+2x+2y-4z-2=0$.
14.4 Найти точки пересечения поверхности $2x^2+y^2-z^2-4x+6y+8z-1=0$ с прямыми:

1) $\begin{cases} x = -3 + 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = 1 - t, \end{cases}$ 2) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+3}{-1}.$

14.5 Доказать, что плоскость $x - 2y + z - 2 = 0$ пересекает сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. Найти центр окружности пересечения.

14.6 Доказать, что плоскость $2x + 3y + 2z - 1 = 0$ пересекает сферу $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 100$. Найти центр окружности пересечения.

14.7 Как расположены точки: $(3; 0; 4)$, $(3; 5; 0)$, $(3; 4; 4)$, $(5; 4; 6)$ относительно сферы $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 49$.

14.8 Написать уравнение касательной плоскости к сфере $x^2+y^2+z^2 = 36$, ортогональной вектору $(1; 2; 3)$.

14.9 Написать уравнение касательной плоскости к сфере $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$, ортогональной вектору $(0; 2; -3)$.

§15 Поверхности вращения. Цилиндрические и конические поверхности.

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат в пространстве. Опуская определения, приведем здесь основные формулы.

Поверхности вращения.
Пусть в плоскости YOZ дана кривая с уравнением $f(y,z)=0$, $y>0$. Будем вращать данную кривую вокруг оси OZ. Уравнение поверхности вращения имеет вид:

$$f(\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

Цилиндрические поверхности.
Рассмотрим цилиндрическую поверхность, направляющая которой имеет уравнения:

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0, \\ g(x,y,z)=0, \end{cases}$$

а образующие параллельны вектору $\vec{p}(a;b;c)$. Параметрические уравнения образующих цилиндрической поверхности имеют вид:

$$\begin{cases} x=x_0+at, \\ y=y_0+bt, \\ z=z_0+ct, \end{cases}$$

где точка $(x_0;y_0;z_0)$ лежит на направляющей цилиндрической поверхности. Чтобы получить уравнение цилиндрической поверхности, нужно из системы уравнений:

$$\begin{cases} x=x_0+at, \\ y=y_0+bt, \\ z=z_0+ct, \\ f(x_0,y_0,z_0)=0, \\ g(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases}$$

исключить x_0, y_0, z_0 и t.

Конические поверхности.
Рассмотрим коническую поверхность, направляющая которой имеет уравнения:

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0, \\ g(x,y,z)=0, \end{cases}$$

а вершина координаты (x_0, y_0, z_0). Параметрические уравнения образующих конической поверхности имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + (\tilde{x} - x_0)t, \\ y = y_0 + (\tilde{y} - y_0)t, \\ z = z_0 + (\tilde{z} - z_0)t, \end{cases}$$

где точка $(\tilde{x}; \tilde{y}; \tilde{z})$ лежит на направляющей конической поверхности. Чтобы получить уравнение конической поверхности, нужно из системы уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0 + (\tilde{x} - x_0)t, \\ y = y_0 + (\tilde{y} - y_0)t, \\ z = z_0 + (\tilde{z} - z_0)t, \\ f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 0, \\ g(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 0 \end{cases}$$

исключить $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ и t.

15.1 Вывести уравнения сферы, конуса, цилиндра как уравнения поверхностей вращения. Сферу, как поверхность, полученную вращением окружности:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = r^2, \\ x = 0 \end{cases}$$

вокруг оси OZ. Конус, как поверхность, полученную вращением прямой:

$$\begin{cases} z = ky, \\ x = 0 \end{cases}$$

вокруг оси OZ. Цилиндр, как поверхность, полученную вращением прямой:

$$\begin{cases} y = c, \\ x = 0, \end{cases}$$

где $c = const$, вокруг оси OZ.

15.2 Написать уравнение поверхности (уравнение тора), полученной вращением окружности:

$$\begin{cases} (y - y_0)^2 + z^2 = r^2, \\ x = 0, \end{cases}$$

где $0 < r < y_0$, вокруг оси OZ.

15.3 Установить, какие поверхности определяются следующими уравнениями и нарисовать эти поверхности:

1) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{36}=1$, 2) $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{4}=1$, 3) $y^2=12z$, 4) $x^2+y^2-z^2=0$.

15.4 Написать уравнение конуса, вершина которого находится в начале координат, а направляющая задана уравнениями:

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-5)^2=9, \\ z=4. \end{cases}$$

15.5 Написать уравнение конуса, вершина которого имеет координаты $(4;0;-3)$, а направляющая задана уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{9}=1, \\ x=0. \end{cases}$$

15.6 Написать уравнение конуса, вершина которого имеет координаты $(-3;0;0)$, а направляющая задана уравнениями:

$$\begin{cases} 3x^2+6y^2-z=0, \\ x+y+z=1. \end{cases}$$

15.7 Найти геометрическое место касательных, проведенных из начала координат к сфере $(x-5)^2+(y+1)^2+z^2=16$.

15.8 Написать уравнение прямого кругового конуса, проходящего через все три координатные оси.

15.9 Прямая $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{6}$ вращается вокруг оси OX. Найти уравнение описанной ею поверхности.

15.10 Написать уравнение цилиндрической поверхности, направляющая которой имеет уравнения:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ z=0, \end{cases}$$

а образующие параллельны вектору $\vec{a}(5;3;2)$.

15.11 Написать уравнение цилиндрической поверхности, направляющая которой имеет уравнения:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=25, \\ x+y-z+2=0, \end{cases}$$

а образующие параллельны прямой:

$$\begin{cases} x = y, \\ z = c, \end{cases}$$

где $c = const$.

15.12 Написать уравнение цилиндрической поверхности, направляющая которой имеет уравнения:

$$\begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x = 2z, \end{cases}$$

а образующие перпендикулярны к плоскости направляющей.

15.13 Написать уравнение цилиндра, описанного около сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, зная, что его образующие составляют равные углы с осями координат.

15.14 Найти угол между образующей и осью вращения конуса $3x^2+3y^2-z^2 = 0$.

§16 Поверхности второго порядка, заданные каноническими уравнениями (продолжение §14).

Напомним уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида.

Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

имеет два семейства образующих. Образующие одного семейства задаются уравнениями:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) m_1 = \left(1 - \frac{y}{b}\right) n_1, \\ \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) n_1 = \left(1 + \frac{y}{b}\right) m_1, \end{cases}$$

где m_1 и n_1 - постоянные, одновременно не равные нулю; а образующие второго семейства уравнениями:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) m_2 = \left(1 + \frac{y}{b}\right) n_2, \\ \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) n_2 = \left(1 - \frac{y}{b}\right) m_2, \end{cases}$$

где m_2 и n_2 - постоянные, одновременно не равные нулю.

Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

имеет два семейства образующих. Образующие одного семейства задаются уравнениями:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) m_1 = n_1, \\ \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) n_1 = z m_1, \end{cases}$$

где m_1 и n_1 - постоянные, одновременно не равные нулю; а образующие второго семейства уравнениями:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) m_2 = z n_2, \\ \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) n_2 = m_2, \end{cases}$$

где m_2 и n_2 - постоянные, одновременно не равные нулю.

16.1 Найти проекцию на плоскость XOY линии пересечения эллипсоида $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ и плоскости $x + 4z - 4 = 0$.
16.2 Найти точки пересечения

1) поверхности $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ с прямой $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+6}{-3} = \dfrac{z+2}{-2}$;

2) поверхности $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - \dfrac{z^2}{9} = 1$ с прямой $x - 3 = y - 1 = \dfrac{z-6}{3}$.

16.3 Дан однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{16} = 1$. Найти уравнения линий его пересечения с плоскостями, параллельными координатным плоскостям.
16.4 По эллипсу

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

скользят две вершины другого эллипса, который перемещается так, что плоскость его остается все время перпендикулярной к оси OY, а сам он деформируется, сохраняя постоянное отношение осей $c : a$. Найти уравнение поверхности, описанной вторым эллипсом.
16.5 Найти геометрическое место хорд поверхности $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$, проходящих через точку $(2; 1; -1)$ и делящихся в этой точке пополам.
16.6 Найти геометрическое место прямых, проходящих через точку $(5; 1; 2)$ и пересекающих поверхность $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$ лишь в одной точке.
16.7 Найти геометрическое место касательных прямых к поверхности $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} - z^2 = 1$, образующих равные углы с осями координат.

16.8 Написать уравнение плоскости, касающейся поверхности $\frac{x^2}{9} + y^2 - \frac{z^2}{4} = -1$ в точке $(-6; 2; 6)$.

16.9 Найти уравнения касательных плоскостей эллипсоида $\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$, которые параллельны плоскости $2x + 2y - 3z + 13 = 0$.

16.10 Найти прямолинейные образующие поверхности $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$, проходящие через точку $(6; 2; 8)$.

16.11 Найти прямолинейные образующие поверхности $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$, параллельные плоскости $2x + 3y - 11 = 0$.

16.12 Найти прямолинейные образующие поверхности $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = z$, проходящие через точку $(10; -4; 3)$.

16.13 Найти прямолинейные образующие поверхности $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$, параллельные плоскости $3x + 2y - 4z + 13 = 0$.

§17 Общая теория кривых второго порядка. Тип кривой. Асимптотические направления. Пересечение кривой второго порядка с прямой. Центр кривой второго порядка.

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{1}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33} - вещественные постоянные и a_{11}, a_{12}, a_{22} одновременно не равны нулю. Знак определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

определяет тип кривой второго порядка (1). Если $\Delta > 0$, то кривая имеет эллиптический тип; если $\Delta < 0$, то кривая имеет гиперболический тип; если $\Delta = 0$, то кривая имеет параболический тип.

Говорят, что вектор $\vec{p}(m, n)$ имеет асимптотическое направление относительно кривой второго порядка (1), если выполняется равенство:

$$a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 = 0.$$

Центр симметрии кривой второго порядка (если он есть) называется ее центром. Чтобы найти центр кривой второго порядка (1), нужно решить следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{cases}$$

17.1 Написать уравнение кривой второго порядка, проходящей через следующие пять точек: $(0; 0)$, $(0; 2)$, $(-1; 0)$, $(-2; 1)$, $(-1; 3)$.
17.2 Написать уравнение кривой параболического типа, проходящей через точки: $(0; 15)$, $(3; 0)$, $(5; 0)$, $(2; 3)$.

17.3 Как изменится уравнение кривой $x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x + 1 = 0$, если начало координат перенести в точку $(-2; 6)$?

17.4 Как изменится уравнение кривой $x^2 + 6x - 8y + 1 = 0$, если начало координат перенести в точку $(-3; -1)$?

17.5 Найти центры следующих кривых:

1) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$,
2) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$,
3) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$.

17.6 Упростить уравнение кривой второго порядка $7x^2+4xy+4y^2-40x-32y+5=0$ за счет перенесения начала координат в центр кривой.

17.7 Найти асимптотические направления следующих кривых:

1) $x^2 + 6xy + 2y^2 + 6x + 2y - 13 = 0$,
2) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 41 = 0$,
3) $x^2 - xy + y^2 + x + 12y + 7 = 0$.

17.8 Найти точки пересечения кривой $x^2 + xy + 2y^2 - 7x - 12y + 10 = 0$ с осями координат.

17.9 Найти длину хорды, отсекаемой кривой $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$ на оси OX.

17.10 При каком значении параметра λ кривая $2x^2 - 3xy + y^2 - 7x + \lambda y + 4 = 0$ отсекает на оси OY хорду длиной 3?

17.11 Найти точки пересечения кривой $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ с прямыми:

1) $5x - y - 5 = 0$,
2) $x + 2y + 2 = 0$,
3) $x + 4y - 1 = 0$.

§18 Общая теория кривых второго порядка. Касательная к кривой второго порядка. Диаметр кривой второго порядка.

Это занятие продолжает занятие 17. Будем использовать общее уравнение кривой второго порядка (1) из занятия 17. Прямая называется касательной к кривой второго порядка, если она пересекает кривую в дважды взятой точке. Пусть точка $A(x_0, y_0)$ лежит на кривой второго порядка (1) (см. занятие 17), тогда уравнение касательной к кривой (1) в точке A имеет вид:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = 0.$$

Геометрическое место середин хорд кривой второго порядка, параллельных вектору $\vec{p}$, называется диаметром кривой второго порядка, сопряженным с направлением вектора $\vec{p}$. Диаметр кривой второго порядка (1), сопряженный с направлением $\vec{p}(m, n)$, имеет уравнение:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})m + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23})n = 0.$$

Диаметры называются сопряженными, если каждый из этих диаметров является геометрическим местом середин хорд параллельных направлению другого диаметра.

18.1 Написать уравнения касательных к кривой $3x^2+2xy+2y^2+3x-4y = 0$ в ее точках, абсциссы которых равны -2.
18.2 Написать уравнения касательных к кривой $3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$, проходящих через начало координат.
18.3 Написать уравнения касательных к кривой $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$, проходящих через точку $(3; 4)$.
18.4 Написать уравнения касательных к кривой $2x^2+xy+y^2+2x+3y-3 = 0$, параллельных оси OX.
18.5 Написать уравнения касательных к кривой $2x^2+xy+y^2+2x+3y-3 = 0$, параллельных прямой $3x + 3y - 17 = 0$, и найти точки прикосновения.
18.6 Написать уравнение кривой второго порядка, проходящей через

начало координат и касающейся прямой $4x + 3y + 2 = 0$ в точке $(1; -2)$ и прямой $x - y - 1 = 0$ в точке $(0; -1)$.

18.7 Дана кривая второго порядка: $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$. Написать уравнение диаметра данной кривой, проходящего через точку $(1; -2)$, и диаметра ему сопряженного.

18.8 Дана кривая второго порядка: $3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$ и один из ее диаметров $x + 2y - 2 = 0$. Написать уравнение диаметра ему сопряженного.

18.9 Дана кривая второго порядка: $2x^2+4xy+5y^2-8x+6 = 0$. Написать уравнение диаметра, параллельного прямой $2x - y + 5 = 0$.

18.10 Дана кривая второго порядка: $5x^2 - 3xy + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0$. Написать уравнение диаметра, проходящего через середину хорды, отсекаемой этой кривой на прямой $x - 2y - 1 = 0$.

18.11 Найти уравнение диаметра кривой $6x^2-xy-2y^2+4y = 0$, который образует угол $45°$ с осью OX.

18.12 Найти уравнения диаметров кривой $3x^2-6xy+5y^2-4x-6y+10 = 0$, которые образуют между собой угол в $45°$.

Ответы

1.3 $\overrightarrow{AP}\left(\frac{k}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right), \quad \overrightarrow{PB}\left(\frac{1}{k+1}, -\frac{1}{k+1}\right)$
1.4 $\overrightarrow{AB}(2;1), \quad \overrightarrow{BC}(-1;1), \quad \overrightarrow{AC}(1;2), \quad \overrightarrow{AM}(1;1)$
1.6 $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$
1.7 $\vec{m} = 2\vec{n} - \vec{p}$
1.8 $\overrightarrow{AD} = \frac{|AC|}{|AC|+|AB|}\overrightarrow{AB} + \frac{|AB|}{|AC|+|AB|}\overrightarrow{AC}$
1.9 a) $(0,5;\ -1,5)$, b) $(4;5)$
2.1 -5
2.2 143
2.3 9
2.4 $-1,5$
2.7 5
2.8 $\frac{\pi}{4}$
2.9 $\cos(\varphi) = 0,8$
2.10 $\alpha = 40$
2.11 $\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \cos(\beta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \cos(\gamma) = \frac{\sqrt{5}}{5}$
2.12 $|AM| = 6, \quad |AD| = \frac{12\sqrt{5}}{5}$
2.14 $\cos(\varphi) = \frac{5}{21}$
2.15 $(-24;32;30)$
2.16 $(-3;3;3)$
2.17 6
2.18 5
2.20 1) $\frac{\pi}{2}$, 2) $\frac{\pi}{3}$, 3) $\cos(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{3}}$
3.2 $(2;-4)$, $(-1;1)$, $(-2;2)$
3.3 1) $(1;3)$, 2) $(4;-3)$
3.4 $(1;-3)$, $(3;1)$, $(-5;7)$
3.5 $(2;1)$ и $(3;1)$
3.8 $x = x' + 3,\ \ y = y' + 4$
3.9 a) $x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y',\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$; b) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y',\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$
3.10 60°
3.11 -45°
3.12 $x = -\frac{15}{17}x' - \frac{8}{17}y' + 9,\ \ y = \frac{8}{17}x' - \frac{15}{17}y' - 3$
3.13 $(1;9), \quad (1+\sqrt{3};1)$
3.14 $(2;0), \quad (1;-\frac{\pi}{2})$
3.19 1) 4; 2) $13,5$
3.20 1) $1,4$; 2) $3\sqrt{2}$

3.21 1) (32;0)
4.1 A, C лежат, B, D не лежат
4.2 $y = 10$
4.5 a) пересекаются, b) параллельны
4.6 $2x + 3y - 7 = 0$
4.7 $3x + 4y - 16 = 0$, $5x + 3y - 1 = 0$, $2x - y - 7 = 0$
4.8 $7x - y + 3 = 0$
4.9 a) лежат, b) не лежат
4.10 a) проходят, b) не проходят
4.11 a) $4x - y = 0$, b) $11y - 16 = 0$, c) $11x - 4 = 0$, d) $17x - 40y + 52 = 0$
4.12 $2x - y - 5 = 0$
4.14 $y = 0$, $x - 3 = 0$, $x - y - 6 = 0$
4.16 $x + 4y - 4 = 0$
4.17 $6x - 30y - 7 = 0$
4.19 $2x + y - 8 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x + 4y - 4 = 0$
4.21 $(2; -1)$
4.22 a) $3x + 2y - 7 = 0$, b) $y - 2 = 0$, c) $x - 1 = 0$, d) $4x + 3y - 10 = 0$
4.23 $x - y + 1 = 0$
4.24 $2x - 5y - 2 = 0$
4.26 1) $p \neq 3$; 2) $p = 3$, $q \neq 2$; 3) $p = 3$, $q = 2$
4.27 $m = \frac{7}{12}$
4.28 $p = -7$
4.30 вне треугольника
5.1 $1,8$
5.2 $2,5$
5.3 $3x - 4y - 25 = 0$, $3x - 4y + 5 = 0$
5.4 49
5.5 $8x - 15y + 9 = 0$
5.6 5
5.8 $2 : 3$
5.9 4
5.12 $8x + 4y - 5 = 0$
5.13 $7x + 56y - 40 = 0$
5.14 $x + y + 5 = 0$
5.16 a) $\frac{\pi}{4}$, b) $\frac{\pi}{2}$
5.17 $k = -5$
5.18 $x + 2y - 5 = 0$ и $x - 6y + 11 = 0$
5.19 $x + 4y - 3 = 0$

5.20 $22x + 33y - 35 = 0,\ \ 5x - y + 3 = 0,\ \ 17x + 34y - 38 = 0$
5.22 $x - y = 3 = 0\ (BC),\ \ 4x + 5y - 20 = 0\ (AC),$
$3x - 12y - 1 = 0\ (CH)$
5.26 $(10; 21)$
5.27 $(2; 4)$
5.28 $x + 7y - 6 = 0,\ \ x - y - 6 = 0,\ \ 7x + y - 10 = 0$
6.3 $\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{85}{9}$
6.4 $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$
6.5 1) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$, 2) точки лежат на одной прямой
6.10 1) с осью OX $(8; 0)$ и $(0; 0)$; с осью OY $(0; -6)$ и $(0; 0)$;
2) с осью OX $(3; 0)$ (касание); с осью OY $(0; 9)$ и $(0; 1)$
6.11 $x^2 + (y - 2)^2 = 4$
6.12 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ и $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$
6.13 $(x - 17)^2 + (y - 17)^2 = 17^2$ и $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$
6.14 $(x - 6)^2 + (y - 7)^2 = 36$
6.15 1) $(3; -1)$ и $(2; -2)$; 2) прямая касается окружности в точке $(-4; 6)$
6.16 $4x - 2y - 9 = 0$
6.17 $x - 2y - 5 = 0$
6.18 1) $y - 7x = 0$ и $x - y = 0$, 2) $4x - 3y - 25 = 0$ и $3x + 4y - 25 = 0$
6.19 $2x - y \pm = 0$
6.20 $(x - 3,5)^2 + (y - 3,5)^2 = 12,5,\ \ \left(x - \frac{13}{18}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{18}\right)^2 = \frac{25}{162}$
6.21 $(5; -6)$
6.22 $5x + 2y - 7 = 0$
6.23 $x + y - 4 = 0$
6.24 1) $\frac{\pi}{2}$
6.25 $y - 2 = 0$, $4x - 3y - 10 = 0$, $x - 1 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$
6.26 1) 3, 2) точка лежит на окружности
6.27 1) $2x + 7y + 8 = 0$, 2) $4x + 4y + 5 = 0$
7.3 $(\pm 5; \pm 2)$
7.4 $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{5} = 1$
7.5 $4\frac{1}{3}$
7.6 $(3; -3)$, $\left(\frac{69}{13}, \frac{21}{13}\right)$
7.7 $\frac{2b^2}{a}$
7.8 $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
7.9 $4x + 9y - 13 = 0$
7.11 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
7.12 $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$

7.13 $(10; -2)$, прямая касается гиперболы
7.14 $9x \pm 4\sqrt{34}y = 0$
7.15 $3x - 4y - 5 = 0$
7.17 $(18; 12)$, $(18; -12)$
7.18 $(2; -6)$, $(0,5;\ 3)$
7.19 $\left(\frac{5}{4}; \sqrt{15}\right)$, $\left(\frac{5}{4}; -\sqrt{15}\right)$
7.20 $2x - y - 3 = 0$
8.1 $y = 3$, $12x + 7y + 51 = 0$
8.2 $2x - y \pm 12 = 0$
8.3 $12x - 13y \pm 169 = 0$
8.4 $(5; 4)$
8.5 $\pm 3x \pm 4y + 15 = 0$
8.6 $x + y \pm 3 = 0$, $x - y \pm 3 = 0$
8.7 $x + y = 1$
8.8 $3x + 2y = 6$, $3x - 2y = 6$
8.9 $x + y \pm 3 = 0$
8.10 $8x \pm \sqrt{11}y - 20 = 0$
8.11 $x + y + 2 = 0$, $2x + 5y + 25 = 0$
8.12 $(9;\ -6)$
8.13 $3x + y + 1 = 0$
8.14 $x \pm 3y + 15 = 0$
9.1 а) $\sin(\varphi) = \frac{5\sqrt{17}}{21}$
9.2 14
9.3 5
9.4 $(7; 5; 1)$
9.5 -7
9.6 1) да, 2) нет, 3) да
9.8 3
9.9 11
9.10 $(0; 8; 0)$, $(0; -7; 0)$
9.11 $(-7; 14; -7)$, $(10; 13; 19)$
9.12 $(-6; -8; -6)$
10.1 $x + 4y + 7z + 16 = 0$
10.2 $9x - y + 7z - 40 = 0$
10.3 $3x + 3y + z - 8 = 0$
10.4 1) параллельны, 2) непараллельны, 3) параллельны
10.5 $l = 3$, $m = -4$; $l = 3$, $m = -\frac{2}{3}$; $l = -3\frac{1}{3}$, $m = -1\frac{1}{5}$
10.6 $2x - 3z - 27 = 0$

10.15 $(2;-1;0)$, $\left(\frac{4}{3};0;-\frac{1}{3}\right)$, $(0;2;-1)$
10.16 1) $d=-4$, 2) $d=9$, 3) $d=3$
10.25 $l=3$
10.26 $\frac{x+4}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-3}{-1}$
11.1 по разные
11.2 пересекает
11.3 1) в смежных углах, 2) в одном угле. 3) в вертикальных углах
11.4 т. лежит внутри тупого угла
11.7 $5x+5z-8=0$
11.8 не принадлежит
11.9 $l=-5$, $m=-11$
11.10 1) $l\neq 7$; 2) $l=7$, $m=3$; 3) $l=7$, $m\neq 3$
11.12 пересекаются
11.13 параллельны
11.14 прямая лежит в плоскости
11.15 $(2;-3;6)$
11.16 $\frac{x-2}{2}=\frac{y+4}{5}=\frac{z+1}{3}$
11.17 $c=-2$
11.18 $4x+6y+5z-1=0$
11.19 $6x-20y-11z+1=0$
11.20 $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z+4}{9}$
11.21 $x=-3+8t$, $y=-1-3t$, $z=2-4t$
11.22 $a=\frac{13}{3}$, $d=\frac{23}{3}$
12.1 $x-2y+3z+3=0$
12.2 $x-y-3z+2=0$
12.3 1) $(3;-5;1)$, 2) $(1;-7;9)$, 3) $(0;1;13)$
12.4 1) нет, 2) да, 3) нет
12.7 $7x-y-5z=0$
12.8 $4x-y-2z-9=0$
12.9 1) 60°, 45°, 60°; 2) 120°, 60°, 45°
12.10 $11x-2y-15z-3=0$
12.11 $4x+3y-5=0$, $5x+3z-7=0$, $5x-4y+1=0$
12.12 $x-8y+5z-3=0$
12.14 $x-1=\frac{y-2}{-3}=\frac{x+7}{-8}$
12.15 $\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{-1}=\frac{x+3}{7}$
12.16 $x=3+3t$, $y=1+15t$, $z=-3+19t$
12.18 60°

12.19 $\cos(\varphi) = \frac{4}{21}$
12.20 $\frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-5}$
12.21 $2x - 3y + 4z - 1 = 0$
12.22 $x + 2y + 3z = 0$
12.23 $a = -3,\ \ b = 4,5$
13.1 4
13.2 1) 2, 2) 3,5, 3) 6,5
13.3 8
13.5 $(0;0;-2)$, и $(0;0;-6\frac{4}{13})$
13.6 $23x - y - 4z - 24 = 0$
13.7 $x - y - z - 1 = 0$
13.8 $x + y + 2z = 0$
13.9 $3x - 2y + 6z + 21 = 0,\ \ 189x + 28y + 48z - 591 = 0$
13.10 $2x - 3y - 6z + 19 = 0,\ \ 6x - 2y - 3z + 18 = 0$
13.11 $4x - 3y + 6z - 12 = 0,\ \ 12x - 49y + 38z + 84 = 0$
13.12 $(3;-2;4)$
13.13 $(2;-3;2)$
13.14 $(4;1;-3)$
13.15 а) $(1;4;-7)$
13.16 а) $(-5;1;0)$
13.17 $(-2;-2;5)$
13.18 1) 21, 2) 6, 3) 15
13.19 25
13.20 $x - 8y - 13z + 9 = 0$
13.21 1) 13, 2) 3, 3) 7
15.4 $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$
15.5 $18y^2 + 50z^2 + 75xz + 225x - 450 = 0$
15.6 $3x^2 + 123y^2 + 23z^2 - 18xy - 22xz + 50yz + 18x - 54y - 66z + 27 = 0$
15.7 $(y - 5x)^2 - 10(x^2 + y^2 + z^2) = 0$
15.8 $xy + xz + yz = 0$
15.9 $40(x-2)^2 - 9y^2 - 9z^2 = 0$
15.10 $(x - 2,5z)^2 + (y - 1,5z)^2 = 25$
15.11 $(x-y)^2 + 3z^2 - 8(x-y) - 8z - 26 = 0$
15.12 $(2x+z)^2 - 10(2x+z) + 25y^2 = 0$
15.13 $3[(x-z)^2 + (y-z)^2 - 1] - (x + y - 2z)^2 = 0$
16.1 $x^2 + 2y^2 - 4x = 0$
16.2 1) $(2;-3;0)$ и $(0;0;2)$; 2) $(4;2;9)$

16.5 $288x + 225y - 400z - 1201 = 0$
16.6 $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} - (z-2)^2 = 0$
16.7 $2(x-z)^2 + 2(x-z)(y-z) + 4(y-z)^2 - 7 = 0$
16.8 $4x - 12y + 9z - 6 = 0$
16.9 $2x + 2y - 3z \pm 12 = 0$
16.10 $x = 6+3t,\ y = 2,\ z = 8+4t;$ и $x = 6+9t,\ y = 2+8t,\ z = 8+20t$
16.13 $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$
17.1 $3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$
17.2 $x^2 - 8x - y + 15 = 0$ и $9x^2 + 6xy + y^2 - 72x - 24y + 135 = 0$
17.3 $x^2 - 4xy + 3y^2 - 4y = 0$
17.4 $x^2 - 8y = 0$
17.5 1) $(7;5)$, 2) центра нет, 3) линия центров: $x + y + 1 = 0$
17.6 $7x^2 + 4xy + 4y^2 - 83 = 0$
17.8 $(5;0)$, $(2;0)$, $(0;5)$, $(0;1)$
17.9 $l = 2$
17.10 $\lambda = \pm 5$
17.11 1) $(1;0)$ и $(0,5;\ -2,5)$, 2) нет т. пересечения, 3) $(1;0)$ прямая касается кривой
18.1 $7x + 4y + 10 = 0$ и $3x - 4y + 18 = 0$
18.2 $2x + 5y = 0$ и $2x + y = 0$
18.3 $7x - 2y - 13 = 0$ и $x - 3 = 0$
18.4 $y + 4 = 0$ и $3x - 4 = 0$
18.6 $6x^2 + 3xy - y^2 + 2x - y = 0$
18.7 $x + 2y + 3 = 0$ и $7x - 5y + 2 = 0$
18.8 $x + 1 = 0$
18.9 $2x - y - 8 = 0$
18.10 $17x - 4y - 4 = 0$
18.11 $49x - 49y + 44 = 0$
18.12 $6x - 12y + 11 = 0$ и $3x - y - 7 = 0;$ $2y - 5 = 0$ и $3x - 3y - 2 = 0$

Оглавление